
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**CLASSICAL SOLVABILITY OF AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A THREE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION
WITH INTEGRAL OBSERVATION**

E. I. Azizbayov¹, Y. T. Mehraliyev², I. E. Chernin³

^{1,3}*Academy of Public Administration under the President of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*
²*Baku State University, Baku, Azerbaijan*

Annotation. This paper addresses the classical solvability of an inverse boundary value problem for a three-dimensional parabolic equation with an integral observation condition. The original problem is reformulated as an auxiliary problem under appropriate assumptions, and their equivalence is rigorously established. By employing the Fourier method, the auxiliary problem is transformed into a system of integral equations. The existence and uniqueness of the solution to this system are proved for sufficiently small time intervals. Consequently, based on the established equivalence, the existence and uniqueness theorem for the classical solution of the original inverse problem is proved.

Keywords: inverse problem, three-dimensional parabolic equation, overdetermination condition, classical solution, existence, uniqueness.

Introduction and problem formulation

It is well known that over the past few decades, considerable attention has been devoted to the study of problems involving the simultaneous determination of unknown coefficients and/or right-hand sides in partial differential equations from additional measurements. Such problems are called inverse problems in the theory of equations of mathematical physics. Inverse problems arise when the characteristics of an object or system of interest cannot be observed directly. Typical examples include reconstructing the characteristics of field sources from their measured values at certain points, as well as recovering or interpreting an original signal from a known output response.

The practical importance of inverse problems is profound, as they arise in a wide range of disciplines, including seismology, biology, medicine, mineral exploration, seawater desalination, and the study of fluid flow in porous media, among others. Consequently, inverse problems constitute some of the most challenging and actively studied topics in modern mathematics. The theoretical and methodological foundations for investigating inverse problems in mathematical physics were laid and developed in the seminal works of distinguished mathematicians such as Tikhonov [1], Lavrent'ev [2], Ivanov [3], and their followers. Owing to their significant practical relevance, inverse problems have continued to attract considerable research interest, leading to the publication of numerous papers in recent decades. In recent years, inverse and ill-posed problems associated with parabolic equations have attracted considerable attention from numerous researchers (see, for example, [4–10], and the references therein). Unlike the aforementioned studies, the present work is concerned with an inverse boundary value problem for a three-dimensional parabolic equation. In this paper, an integral overdetermination condition is imposed on the corresponding direct problem, and the existence and uniqueness of the solution to the resulting inverse boundary value problem are established.

Let $T > 0$ be a fixed time moment, and let $D = Q_{xyz} \times \{0 \leq t \leq T\}$, where Q_{xyz} is the spatial domain determined by the inequalities for the spatial variables $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, and $0 < z < 1$. In addition, we set $D_T := D$ and consider the problem of determining the unknown functions $u(x, y, z, t) \in C^{2,2,2,1}(D_T)$ and $a(t) \in C[0, T]$ that satisfy the following three-dimensional parabolic equation:

$$u_t(x, y, z, t) = u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)$$

$$+a(t)u(x,y,z,t)+f(x,y,z,t) \quad (x,y,z,t) \in D_T, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u(0,y,z,t) = u_x(1,y,z,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x,0,z,t) = u_y(x,1,z,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(x,y,0,t) = u_z(x,y,1,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

and the overdetermination condition

$$u(1,1,1,t) + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x,y,z)u(x,y,z,t) dx dy dz = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

where $f(x,y,z,t)$, $\varphi(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, and $h(t)$ are known functions.

To avoid unnecessary length, we state the following theorem without proof.

Theorem 1. Suppose that $\varphi(x,y,z), w(x,y,z) \in C(\bar{Q}_{xyz})$, $f(x,y,z,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^1[0, T]$, $h(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq T$ and the compatibility condition

$$\varphi(1,1,1) + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x,y,z)\varphi(x,y,z) dx dy dz = h(0), \quad (7)$$

hold. Then the problem of finding a classical solution of (1)–(6) is equivalent to the problem of determining the functions $u(x,y,z,t) \in C^{2,2,2,1}(D_T)$ and $a(t) \in C[0, T]$, satisfying (1)–(5), and the condition

$$\begin{aligned} h''(t) &= u_{xx}(1,1,1,t) + u_{yy}(1,1,1,t) + u_{zz}(1,1,1,t) \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x,y,z)(u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t) + u_{zz}(x,y,z,t)) dx dy dz \\ &+ a(t)h(t) + f(1,1,1,t) + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x,y,z)f(x,y,z,t) dx dy dz, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (8)$$

Classical solvability of the inverse boundary value problem

We impose the following restrictions on the data of problem (1)–(5), (8):

R1) $\varphi(x,y,z) \in C^2(\bar{Q}_{xyz})$, $\varphi_{xy}(x,y,z), \varphi_{yy}(x,y,z), \varphi_{xx}(x,y,z), \varphi_{yy}(x,y,z)\varphi_{xyz}(x,y,z)$,
 $\varphi_{xxz}(x,y,z), \varphi_{xzz}(x,y,z), \varphi_{yzz}(x,y,z), \varphi_{yyz}(x,y,z), \varphi_{zzy}(x,y,z) \in L_2(Q_{xyz})$,

$$\varphi(0,y,z) = \varphi_x(1,y,z) = \varphi_{xx}(0,y,z) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$\varphi(x,0,z) = \varphi_y(x,1,z) = \varphi_{yy}(x,0,z) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$\varphi(x,y,0) = \varphi_z(x,y,1) = \varphi_{zz}(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

R2) $f(x,y,z,t), f_x(x,y,z,t), f_y(x,y,z,t), f_z(x,y,z,t), f_{xx}(x,y,z,t), f_{xy}(x,y,z,t), f_{yy}(x,y,z,t) \in C(D_T)$,

$$f_{xyz}(x,y,z,t), f_{xxz}(x,y,z,t), f_{yyy}(x,y,z,t), f_{zzz}(x,y,z,t) \in L_2(D_T),$$

$$f(0,y,z,t) = f_x(1,y,z,t) = f_{xx}(0,y,z,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$f(x,0,z,t) = f_y(x,1,z,t) = f_{yy}(x,0,z,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$f(x,y,0,t) = f_z(x,y,1,t) = f_{zz}(x,y,0,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T;$$

R3) $w(x,y,z) \in C(\bar{Q}_{xyz})$, $h(t) \in C^1[0, T]$, $h(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq T$.

We seek the first component $u(x,y,z,t)$ of the classical solution $\{u(x,y,z,t), a(t)\}$ to problem (1)–(5), (8) in the form

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n,m}(t) \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y \sin \eta_m z, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad k=1, 2, \dots, \quad \gamma_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad \eta_m = (2m-1) \frac{\pi}{2}, \quad m=1, 2, \dots, \\ u_{k,n,m}(t) &= 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u(x, y, z, t) \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y \sin \eta_m z dx dy dz, \quad k, n, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Applying the formal scheme of the Fourier method to equations (1) and (2), we obtain

$$u'_{k,n,m}(t) + \mu_{k,n,m}^2 u_{k,n,m}(t) = F_{k,n,m}(\tau; u, a), \quad k, n, m = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

$$u_{k,n,m}(0) = \varphi_{k,n,m}(\tau; u, a), \quad k, n, m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

where

$$\mu_{k,n,m}^2 = \lambda_k^2 + \gamma_n^2 + \eta_m^2, \quad k, n, m = 1, 2, \dots,$$

$$F_{k,n,m}(t; u, a) = f_{k,n,m}(t) + a(t)u_{k,n,m}(t),$$

$$f_{k,n,m}(t) = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z, t) \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y \sin \eta_m z dx dy dz, \quad k, n, m = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{k,n,m} = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y, z) \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y \sin \eta_m z dx dy dz, \quad k, n, m = 1, 2, \dots$$

Solving problem (11), (12), we find

$$u_{k,n,m}(t) = \varphi_{k,n,m} e^{-\mu_{k,n,m}^2 t} + \int_0^t F_{k,n,m}(\tau; u, a) e^{-\mu_{k,n,m}^2 (t-\tau)} d\tau, \quad k, n, m = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Substituting the expressions $u_{k,n,m}(t)$ ($k, n, m = 1, 2, \dots$) described by (13) into (9), to determine the first component of the solution (1)–(5), (8), we have

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{k,n,m} e^{-\mu_{k,n,m}^2 t} + \int_0^t F_{k,n,m}(\tau; u, a) e^{-\mu_{k,n,m}^2 (t-\tau)} d\tau \right\} \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y \sin \eta_m z. \quad (14)$$

Further from (8) and (9), c учетом (13), taking into account $h(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq T$, we get

$$\begin{aligned} a(t) &= [h(t)]^{-1} \left\{ h'(t) - f(1, 1, 1, t) - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x, y, z) f(x, y, z) dx dy dz \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n,m} \left[\varphi_{k,n,m} e^{-\mu_{k,n,m}^2 t} + \int_0^t F_{k,n,m}(\tau; u, a) e^{-\mu_{k,n,m}^2 (t-\tau)} d\tau \right] \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$p_{k,n,m} = \lambda_k^2 \sin \lambda_k + \gamma_n^2 \sin \gamma_n + \eta_m^2 \sin \eta_m + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x, y, z) (\lambda_k^2 \sin \lambda_k x + \gamma_n^2 \sin \gamma_n y + \eta_m^2 \sin \eta_m z) dx dy dz.$$

Thus, the problem (1)–(5), (8) is reduced to solving the system (14), (15) with respect to the unknown functions $u(x, y, z, t)$ and $a(t)$.

Using the definition of the solution of the problem (1)–(5), (8), we prove the following lemma.

Lemma. If $\{u(x, y, z, t), a(t)\}$ is any solution to the problem (1)–(5), (8), then the functions

$$u_{k,n}(t) = 4 \int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) \sin \lambda_k x \sin \gamma_n y dx dy, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

satisfy the system (12) in $[0, T]$.

Remark. It follows from the foregoing lemma that to prove the uniqueness of the solution to the problem (1)–(5), (8), it suffices to prove the uniqueness of the solution to the system (14), (15).

Theorem 2. Let the conditions R1)–R4) be satisfied. Then the problem (1)–(5), (8) admits a unique solution for sufficiently small values of time.

Consequently, by virtue of Theorem 1, Theorem 2 implies the validity of the following assertion.

Theorem 3. Assume that all the conditions of Theorem 2 are fulfilled and

$$\varphi(1,1,1) + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(x, y, z) \varphi(x, y, z) dx dy dz = h(0).$$

Then problem (1)–(6) has a unique for sufficiently small values of T .

References

1. *Tikhonov A. N. On stability of inverse problems / A. N. Tikhonov // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1943. – Vol. 39, № 5. – P. 195–198.*
2. *Lavrent'ev M. M. On some ill-posed problems of mathematical physics / M. M. Lavrent'ev. – Novosibirsk : Nauka, 1962.*
3. *Ivanov V. K. On linear ill-posed problems / V. K. Ivanov // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1962. – Vol. 145, № 2. – P. 270–272.*
4. *Azizbayov E. I. Solvability of nonlocal inverse boundary-value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions / E. I. Azizbayov, Y. T. Mehraliyev // Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – Vol. 2017, № 125. – P. 1–14.*
5. *Azizbayov E. I. The nonlocal inverse problem of the identification of the lowest coefficient and the right-hand side in a second-order parabolic equation with integral conditions / E. I. Azizbayov // Boundary Value Problems. – 2019. – Vol. 2019, № 11. – P. 1–19.*
6. *Kamynin V. L. Inverse problem of simultaneously determining the right-hand side and the coefficient of a lower order derivative for a parabolic equation on the plane / V. L. Kamynin // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, № 6. – P. 792–804.*
7. *Kozhanov A. I. On the solvability of the inverse problem of determining the thermal conductivity coefficient / A. I. Kozhanov // Siberian Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 40, № 5. – P. 841–856.*
8. *Mehraliev Ya. T. On one nonlocal inverse boundary problem for the second-order parabolic equation / Ya. T. Mehraliev and A. N. Safarova // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika. – 2017. – Vol. 9, № 2. – P. 13–21.*
9. *Mehraliyev Y. T. Simultaneous identification of the right-hand side and time-dependent coefficients in a two-dimensional parabolic equation / Y. T. Mehraliyev, M. J. Huntul, E. I. Azizbayov // Mathematical Modelling and Analysis. – 2024. – Vol. 29, № 1. – P. 90–108.*
10. *Prilepko A. I. Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time / A. I. Prilepko, V. L. Kamynin, A. B. Kostin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2018. – Vol. 26, № 4. – P. 523–539.*

**КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА НА СФЕРЕ,
ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ В КАЧЕСТВЕ УЗЛОВ ВЕРШИНЫ ИКОСАЭДРА**

Е. Г. Алипатов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Обсуждается кубатурная формула приближенного вычисления поверхностного интеграла 1-го рода по сфере, использующая в качестве узлов вершины икосаэдра. Приводится оценка точности.

Ключевые слова: кубатурная формула, оператор Лапласа — Бельтрами, сферические гармоники, икосаэдр.

Введение

Рассмотрим функцию $f : S^2 \rightarrow R$, где $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\}$. Для сферы будем использовать следующую параметризацию:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= \sin \varphi \sin \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \\ z &= \cos \theta \end{aligned}$$

При использовании такой параметризации будем интерпретировать f как функцию переменных θ и φ .

В работе рассматривается кубатурная формула приближенного вычисления интеграла по сфере

$$\int_{S^2} f(x) dS \approx \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} f(c_i), \quad (1)$$

где c_i — вершины икосаэдра. Устанавливается, что эта формула является точной на первых 36 собственных функциях оператора Бельтрами — Лапласа (сферических гармониках). Приводится оценка точности обсуждаемой кубатурной формулы.

Ранее кубатурные формулы на сфере обсуждались в работах [1–4].

1. Сферические гармоники

Оператором Бельтрами — Лапласа [8, с. 721] называют угловую часть оператора Лапласа на R^3

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

А именно, оператор Бельтрами — Лапласа есть

$$\Delta_s = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Известно [6, с. 474], что оператор Δ_s является симметрическим и допускает расширение до самосопряженного оператора в $L_2(S^2)$. Спектр оператора Δ_s состоит из чисел $\lambda_n = -n(n+1)$; очевидно, числа λ_n стремятся к $-\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Собственные подпространства $E_n = E_{\lambda_n}$, соответствующие λ_n , имеют размерности $2n+1$; в качестве ортонормированного базиса в $E_n = E_{\lambda_n}$ можно взять функции

$$\begin{aligned}
H_n^{(-m)}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \cos(m\varphi) P_n^{(m)}(\theta), \\
H_n^{(+m)}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \sin(m\varphi) P_n^{(m)}(\theta),
\end{aligned} \tag{2}$$

называемые *сферическими гармониками*. В приведенных формулах $P_n^{(m)}(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра [7, 8], которые определяются как решения дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dy}{dt} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2} \right) y = 0.$$

Также известны следующие факты.

Теорема 1. Система функций $\{H_n^{(m)}\}_{n \in N, m=-n, \dots, n}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S^2)$. Любая функция f из $L_2(S^2)$ разлагается в ряд

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \langle f, H_n^{(m)} \rangle H_n^{(m)}(\theta, \varphi),$$

сходящийся по L_2 -норме.

Предложение 2. Оператор Δ_s коммутирует с любым оператором ортогонального преобразования координат T в R^3 . Собственные подпространства E_{λ_n} инвариантными относительно оператора T :

$$T(E_{\lambda_n}) \subseteq E_{\lambda_n}. \tag{3}$$

2. Кубатурная формула для сферы

Кубатурной формулой называют приближенную формулу для вычисления кратных интегралов, аналогичную квадратным формулам для интегралов по отрезкам.

В настоящей работе обсуждается кубатурная формула для приближенного вычисления интеграла по сфере

$$\int_{S^2} f(x) dS \approx \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} f(c_i), \tag{4}$$

где c_i — вершины икосаэдра. Число $s \in N$ назовем *порядком точности* кубатурной формулы (4), если она является точной на всех подпространствах E_{λ_i} , $i = 0, 1, \dots, s$. Например, условия порядка точности 3 для кубатурной формулы (4) выглядят так:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} b_i H_0^{(0)}(c_i) &= \int_{S^2} H_0^{(0)}(x) dS, \\
\sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(-1)}(c_i) &= \int_{S^2} H_1^{(-1)}(x) dS, \\
\sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(0)}(c_i) &= \int_{S^2} H_1^{(0)}(x) dS, \\
\sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(1)}(c_i) &= \int_{S^2} H_1^{(1)}(x) dS, \\
&\dots \\
\sum_{i=1}^{12} b_i H_3^{(3)}(c_i) &= \int_{S^2} H_3^{(3)}(x) dS,
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь c_i вершины — вершины икосаэдра, которые задаются следующим образом:

$$\{c_i\} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \{(0, \pm 1, \pm \varphi), (\pm 1, \pm \varphi, 0), (\pm \varphi, 0, \pm 1)\},$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

Заметим, что в каждом подпространстве E_{λ_i} имеется линейно независимых гармоник. Поэтому в общем случае для порядка точности s возникает s^2 уравнений. В частности, для $s = 3$ имеем 9 уравнений. Заметим, что в силу ортогональности гармоник имеем

$$\int_{S^2} H_n^{(m)}(x) dS = \langle H_n^{(m)}, 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{n,0} \delta_{m,0}.$$

Поэтому система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} b_i H_0^{(0)}(c_i) &= \sqrt{4\pi}, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(-1)}(c_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(0)}(c_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(1)}(c_i) &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_3^{(3)}(c_i) &= 0, \end{aligned}$$

Так как $H_0^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, то первое уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} b_i &= 4\pi, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(-1)}(c_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(0)}(c_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(1)}(c_i) &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_3^{(3)}(c_i) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

Расчеты показывают, что минор $M_{1,2,12}$, полученный вычеркиванием первого, второго и 12-го столбцов из матрицы системы (6), отличен от нуля. Таким образом, матрица системы (6) имеет ранг. Поэтому система (6) имеет решение.

3. Симметрии системы уравнений

Далее будем использовать симметричность выбранных узлов c_i . Обозначим через W группу линейных ортогональных преобразований, которые переводят вершины икосаэдра в себя.

Такие преобразования будем обозначать U . Очевидно, группа W действует на множество вершин транзитивно, то есть

$$\forall c_i, c_j \quad \exists U_{i,j} : \quad U_{i,j} c_i = c_j.$$

Вместе с тем, поскольку преобразования $U_{i,j}$ являются ортогональными, в силу предложения 2

$$U_{i,j}(E_\lambda) \subseteq E_\lambda. \quad (7)$$

Предложение 3. Если для некоторого набора b_i выполнены равенства из системы (6) для всех базисных функций $H_l^{(m)}$ из подпространства E_{λ_l} (за исключением $\lambda_l = 0$), то

$$\forall h \in E_{\lambda_l} \quad \sum_{i=1}^{12} b_i h(c_i) = 0.$$

Напомним, что $H_0^{(0)}$ — константа. Поэтому любое преобразование $U_{i,j}$ действует на $H_0^{(0)}$ тождественно, а, следовательно, соответствующее уравнение из системы (6) выполняется и для $U_{i,j}(H_0^{(0)})$. Таким образом, система уравнений (6) не изменяется, если действовать на функции $H_n^{(m)}$ преобразованиями $U_{i,j}$. Отсюда вытекает основное свойство данной системы.

Предложение 4. Коэффициенты $b_i = \frac{\pi}{3}$ всегда являются решением системы (6).

Доказательство. Рассмотрим произвольное уравнение для некоторого подпространства $\lambda \neq 0$.

$$\sum_{i=1}^{12} b_i H_n^{(m)}(c_i) = 0.$$

Применим $U_{i,j}$ к нашему уравнению. Тогда вектор b_i все ещё будет решением системы в силу предложения 2, причем коэффициенты b_k и b_j при $H_n^{(m)}(c_k)$ и $H_n^{(m)}(c_j)$ поменяются местами:

$$b_k H_n^{(m)}(c_k) + b_j H_n^{(m)}(c_j) + \dots = b_j H_n^{(m)}(c_k) + b_k H_n^{(m)}(c_j) + \dots = 0.$$

Отсюда $b_k = b_j$. Так как данное равенство выполняется для всех различных пар индексов (i, j) , то

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{12} = b.$$

Первого уравнения из системы (6) непосредственно находится константа b . Имеем

$$\sum_{i=1}^{12} b \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \sqrt{4\pi}.$$

Отсюда

$$b = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

Изменяя систему (6), можно составить уравнения для точного интегрирования на подпространствах E_{λ_3} , E_{λ_4} и E_{λ_5} . Уравнения системы (6), относящиеся к каждому из этих подпространств, являются линейно независимыми. Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, нетрудно показать, что вектор $b_i = \pi/3$, $i = 1, 2, \dots, 12$, является решением системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} b_i H_0^{(0)}(c_i) &= \int_{S^2} H_0^{(0)}(x) dS, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(-1)}(c_i) &= \int_{S^2} H_1^{(-1)}(x) dS, \\ \sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(0)}(c_i) &= \int_{S^2} H_1^{(0)}(x) dS, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{12} b_i H_1^{(1)}(c_i) = \int_{S^2} H_1^{(1)}(x) dS,$$

$$\sum_{i=1}^{12} b_i H_5^{(5)}(c_i) = \int_{S^2} H_5^{(5)}(x) dS.$$

Таким образом, кубатурная формула с коэффициентами $b_i = \frac{\pi}{3}$ является точной на собственных подпространствах $E_{\lambda_0}, E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, E_{\lambda_3}, E_{\lambda_4}$ и E_{λ_5} оператора Δ_S .

4. Оценка погрешности кубатурной формулы

Погрешностью обсуждаемой кубатурной формулы (4) назовем следующую величину

$$E(f) = \left| \int_{S^2} f(x) dS - \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} f(c_i) \right|.$$

Теорема 5. Пусть $f \in L_2(S^2)$ и $\Delta_S^l f \in L_2(S^2)$ для некоторого $l \in N$. Тогда погрешность формулы (4) допускает оценку

$$E(f) \leq \sqrt{12\pi} \left\| \Delta_S^l f \right\|_{L_2} \sum_{n=6}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-2l}.$$

Доказательство. Разложим нашу функцию f в ряд по гармоникам:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{n,m} H_n^{(m)},$$

где $f_{n,m} = \langle f, H_n^{(m)} \rangle$. Обозначим через Y_n следующие отрезки ряда

$$Y_n(x) = \sum_{m=-n}^n f_{n,m} H_n^{(m)}(x).$$

Таким образом,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x). \quad (9)$$

Подставим это разложение в формулу для погрешности:

$$\left| \int_{S^2} f(x) dS - \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} f(c_i) \right| = \left| \int_{S^2} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x) dS - \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(c_i) \right|.$$

В силу равномерной сходимости [6, с. 489] ряда (9) можно поменять знаки суммирования и интегрирования местами. Затем воспользуемся тем, что формула (4) точно интегрирует функции Y_n для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$E(f) = \left| \int_{S^2} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x) dS - \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(c_i) \right| = \left| \sum_{n=6}^{\infty} \int_{S^2} Y_n(x) dS - \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=6}^{\infty} Y_n(c_i) \right|.$$

В силу ортогональности гармоник окончательно получаем, что

$$E(f) = \frac{\pi}{3} \left| \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=6}^{\infty} Y_n(c_i) \right| \leq \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=6}^{\infty} |Y_n(c_i)|.$$

Из теории кубатурных формул на сфере известно [6], что

$$|Y_n(x)| \leq K n^{\frac{1}{2}-2l} \left\| \Delta_S^l f \right\|_{L_2}, \quad x \in S^2,$$

где K — константа не зависящая от функции f . Причем константу K можно оценить как

$$K \leq \sqrt{\frac{3}{4\pi}}.$$

Применяя эту оценку, получаем

$$E(f) \leq \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{12} \sum_{n=6}^{\infty} |Y_n(c_i)| \leq \sqrt{12\pi} \left\| \Delta_S^l f \right\|_{L_2} \sum_{n=6}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-2l}.$$

Замечание 6. Численные расчеты для ряда из теоремы 5 приводят к следующим значениям оценкам для погрешности для различных l

$$\begin{aligned} E(f) &\leq 5.23081 \left\| \Delta_S^1 f \right\|_{L_2}, \quad l=1, \\ E(f) &\leq 0.0342117 \left\| \Delta_S^2 f \right\|_{L_2}, \quad l=2, \\ E(f) &\leq 0.000615079 \left\| \Delta_S^3 f \right\|_{L_2}, \quad l=3, \\ E(f) &\leq 0.000013643 \left\| \Delta_S^4 f \right\|_{L_2}, \quad l=4, \\ E(f) &\leq 3.31101 * 10^{-7} \left\| \Delta_S^5 f \right\|_{L_2}, \quad l=5, \end{aligned}$$

Литература

1. Казаков А. Н. Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра / А. Н. Казаков, В. И. Лебедев // Тр. МИАН. – 1994. – Т. 203. – С. 100–112.
2. Лебедев В. И. Квадратурная формула для сферы 59-го алгебраического порядка точности / В. И. Лебедев // Докл. РАН. – 1994. – Т. 338, № 4. – С. 454–456.
3. Лебедев В. И. Квадратурные формулы для сферы 41-, 47- и 53-го порядков / В. И. Лебедев, А. Л. Скороходов // Докл. РАН. – 1992. – Т. 324, № 3. – С. 519–524.
4. Попов А. С. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра / А. С. Попов // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 433–440.
5. Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы / С. Л. Соболев // Сиб. матем. журн. – 1962. – Т. 3, № 5. – С. 769–796.
6. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1974. – 808 с.
7. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суэтин. – Второе изд. – М. : Наука, 1979. – 416 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИЕЙ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Х. Алкади

Воронежский государственный университет

Аннотация. Исследуется задача субдиффузии в полупространстве с периодическим граничным условием. Для уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля получено аналитическое решение в виде суперпозиции затухающих температурных волн. Изучены свойства решения: экспоненциальное затухание амплитуды, сдвиг фазы и зависимость глубины проникновения от параметра субдиффузии. Показано, что при значении параметра субдиффузии, равном единице, решение переходит в классический случай. На основе решения предложен метод определения параметра субдиффузии по данным измерений температуры на двух глубинах. Результаты применимы в геофизике и материаловедении для анализа теплопереноса в средах с фрактальной структурой.

Ключевые слова: уравнение субдиффузии, дробные производные, тепловые волны, параметр субдиффузии, периодические условия, затухание амплитуды.

Введение

За последние десятилетия уравнения с дробными производными нашли широкое применение для моделирования процессов аномального переноса в сложных средах. В отличие от классической диффузии, описываемой уравнением Фурье, процессы субдиффузии характеризуются нелокальностью по времени и медленным расплыванием возмущений. Это связано с фрактальной структурой среды и наличием ловушек.

Особый интерес представляют тепловые дробные волны как решения дробного уравнения теплопроводности:

$$\partial_t^\alpha u = a \Delta u, \quad \alpha \in (0, 1),$$

В этом уравнении ∂_t^α — обозначает дробную производную в смысле Капуто. Данная модель адекватно описывает процессы теплопереноса в пористых средах, геологических структурах и композитных материалах.

1. Постановка задачи и формулировка результата

В скалярном случае рассматривается задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha}, \quad x > 0, t \in (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha}$ — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1]$, $t \in (-\infty, \infty)$ функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям

$$u(t, 0) = \varphi(t) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u(t, x)| = 0 \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция с рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right]. \quad (4)$$

В случае $\alpha < 1$ интересно проследить влияние параметра замедленной диффузии α на глубину проникновения тепла в почву.

Основным результатом этих исследований является:

Теорема. Если в условии (2) $\varphi(t)$ — периодическая функция вида (4), то задача (1)–(3) имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x),$$

где

$$u_n(t, x) = A_n e^{-\cos \frac{\alpha \pi}{4} w_n^{\alpha/2} x} \cos \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w_n^{\alpha/2} x - w_n t + w_n \delta_n^0 \right).$$

2. Доказательство теоремы

Докажем сначала эту теорему для $\varphi(t) = A \cos(wt)$ то есть решаем задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(t, 0) = A \cos(wt). \quad (5)$$

Решение будем искать в виде

$$u(t, x) = A g(x) e^{iwt}, \quad (6)$$

где $g(x)$ — неизвестная функция.

Тогда, подставляя (6) в (1) и пользуясь (2), получаем уравнение для $g(x)$

$$g''(x) - (iw)^{\alpha} g(x) = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$g(x) = C_1 e^{(iw)^{\alpha/2} x} + C_2 e^{-(iw)^{\alpha/2} x}.$$

Тогда, учитывая, что

$$(iw)^{\alpha/2} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^{\alpha/2} \cdot w^{\alpha/2} = \left(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) \right) w^{\alpha/2}.$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(iw)^{\alpha/2} x} = e^{-\left(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) \right) w^{\alpha/2} x} = \\ &= e^{-(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) w^{\alpha/2} x)} \left[\cos \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x \right) + i \sin \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя представление $g(x)$ из (8) в (7), получаем решение задачи (1)–(2)–(3):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= A e^{-\left(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) w^{\alpha/2} x \right)} \left[\cos \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x \right) + i \sin \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x \right) \right] \cos(wt) = \\ &= A e^{-\left(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) w^{\alpha/2} x \right)} \left[\cos \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x - wt \right) + i \sin \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x + wt \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Выделяя в равенстве (9) действительную часть, окончательно получаем решение задачи:

$$u(t, x) = A e^{-\left(\cos \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right) w^{\alpha/2} x \right)} \left[\cos \left(\sin \frac{\alpha \pi}{4} w^{\alpha/2} x - wt \right) \right]. \quad (10)$$

Очевидно, что при $\alpha = 1, n = 1$ формулы (10) и (4) совпадают.

Взяв температурные волны, соответствующие каждому слагаемому в разложении (4), используя (10), получаем (5).

Замечание. Из хода рассуждений при доказательстве (10) следует, что если в условиях (2) $\varphi = A \sin(wt)$, то решение соответствующей задачи имеет вид

$$u(t, x) = A e^{-(\cos(\frac{\alpha\pi}{4}) w^{\frac{\alpha}{2}} x)} \left[\sin \left(\sin \frac{\alpha\pi}{4} w^{\frac{\alpha}{2}} x + wt \right) \right].$$

Далее, учитывая, что по теореме С. Г. Крейна функцию $u(t, x)$ можно записать в виде

$$u(t, x) = u\left(x, -\left(-\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\right)\right) \varphi(x),$$

где $u\left(x, -\left(-\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\right)\right)$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором $-\left(-\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\right)$, заключаем, что решение является единственным в классе ограниченных функций.

3. Физическая интерпретация и приложения

Полученное решение позволяет дать следующую характеристику процесса субдиффузии (распространения температурной волны), имеющую важное значение для приложений в геофизике и материаловедении:

3.1. Амплитуда колебаний

Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной:

$$A(x) = A e^{-(\cos(\frac{\alpha\pi}{4}) w^{\frac{\alpha}{2}} x)}.$$

3.2. Сдвиг фазы

Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине:

$$\delta = \frac{1}{w^{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{4} x\right).$$

3.3. Глубина проникновения тепла

Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности и от параметра субдиффузии α .

Относительное изменение температурной амплитуды равно:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\cos(\frac{\alpha\pi}{4}) w^{\frac{\alpha}{2}} x}.$$

Эта формула показывает зависимость глубины проникновения температурных волн от параметров α и w . То есть, чем больше величина $\mu(\alpha, w) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right) w^{\frac{\alpha}{2}} x$, тем меньше глубина проникания.

Анализируя функцию $\mu(\alpha, w)$, заключаем, что в силу оценок $\frac{\sqrt{2}}{2} < \mu(\alpha, w) < 1$, приближенно можно считать $\mu(\alpha, w) \approx w^{\frac{\alpha}{2}}$.

И, следовательно, если

$$0 < w \leq 1,$$

то при возрастании α , $\mu(\alpha, w)$ убывает и проникаемость увеличивается и становится максимальной при $\alpha = 1$.

Если же $w > 1$ то меньшим α соответствует большая проникаемость.

3.4. Определение параметра субдиффузии

Из решения следует, что температура $u(t, x)$ для любых x является периодической функцией времени.

Тогда исходя из ее вида гармоник $u_n(t, x)$ заключаем, что справедливо соотношение

$$B_n = \frac{\sqrt{a_n^2(x_1)} + \sqrt{b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2)} + \sqrt{b_n^2(x_2)}} = e^{-\cos \frac{\alpha \pi}{4} w_n^{\frac{\alpha}{2}} (x_1 - x_2)},$$

которое показывает, что если произвести измерение температуры в каких-нибудь точках x_1 и x_2 за полный период, то при известном w можно, пользуясь приближением

$$\cos\left(\frac{\alpha \pi}{4}\right) w_n^{\frac{\alpha}{2}} \approx w_n^{\frac{\alpha}{2}},$$

получить значение параметра субдиффузии α по формуле

$$\alpha = \frac{2 \ln \frac{1}{B_n}}{\ln w(x_1 - x_2)}.$$

Заключение

В работе получено аналитическое решение задачи субдиффузии с периодическим граничным условием и исследованы его физические свойства. Предложенный метод определения параметра субдиффузии может быть использован в экспериментальных исследованиях теплопереноса в сложных средах.

Литература

1. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Майнарди Ф. Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции // Радиофизика и квантовая электроника. – 1995. – Т. 38, № 1–2. – С. 20–36.
3. Подлубный И. Дробные дифференциальные уравнения / И. Подлубный. – Москва : Наука, 2003. – 304 с.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ И ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. Г. Баскаков¹, Г. В. Гаркавенко¹, Л. Н. Костина¹, Н. Б. Ускова²

¹Воронежский государственный университет

²Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе изучаются спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка на отрезке, возмущенных интегральным оператором с суммируемым с квадратом ядром с инволюцией. Показано, что при условии малости возмущения исследуемые операторы подобны операторам, которые являются ортогональной прямой суммой операторов ранга 1. При отсутствии малости они представимы как ортогональная прямая сумма оператора конечного ранга и операторов ранга один. Производятся асимптотические оценки собственных значений и собственных векторов исследуемых операторов.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, интегральный оператор, спектр, ортогональная прямая сумма операторов, собственные векторы, инволюция.

Введение

Дифференциальные операторы с инволюцией являются объектом глубокого исследования (см., например, работы [1–10] и ссылки в них). Напомним, что если H — гильбертово пространство, $\text{End } H$ — алгебра ограниченных операторов в H , то $J \in \text{End } H$ называется оператором инволюции, если $J^2 = I$, где I — тождественный оператор. Стандартным и наиболее изученным является случай, когда оператор инволюции находится при операторе умножения на потенциал, но также рассматриваются операторы с инволюцией при дифференциальном операторе.

В работах [11–13] рассматривался дифференциальный оператор первого порядка с интегральным возмущением, исследование его спектральных свойств проводилось с помощью метода подобных операторов, причем адаптированную к операторам такого класса версию можно найти в [11, 12, 14]. Отметим, что дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией в работах [6–8] также исследовались с помощью метода подобных операторов, но с применением отличающейся его схемы, связанной с предварительным преобразованием подобия.

Ниже мы будем рассматривать дифференциальные операторы первого порядка с интегральным возмущением, как и в работах [11–13], но с инволюцией при возмущении. Заметим, что интегральные операторы с инволюцией на прямой изучались, например, в [15, 16].

1. Постановка задачи

Приступим к постановке задачи. В комплексном гильбертовом пространстве $H = L_2[0, \omega]$ измеримых по Лебегу на $[0, \omega]$ и суммируемых с квадратом модуля классов эквивалентности функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x, y \in H,$$

рассмотрим оператор

$$A = \frac{d}{dt} : D(A) \subset W_2^1[0, \omega] \subset H \rightarrow H.$$

Здесь через $W_2^1[0, \omega]$, обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из H с производными из H . Оператор A будет играть роль невозмущенного оператора в методе подобных операторов с хорошо изученными спектральными свойствами. Его простыми собственными значениями являются числа

$$\lambda_n = \lambda_n(A) = i \frac{2\pi n}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

собственными векторами — функции

$$e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{\frac{i2\pi n}{\omega} t}, \quad t \in [0, \omega], \quad n \in \mathbb{Z}$$

и спектральные проекторы задаются равенствами

$$P_n = P(\{\lambda_n\}, A), \quad P_n x = (x, e_n) e_n, \quad P_{(k)} = \sum_{|j| \leq k} P_j, \quad x \in H, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$

Далее через $\sigma_2(H) \subset \text{End } H$ обозначим двусторонний идеал операторов Гильберта — Шмидта с нормой, обозначаемой $\|X\|_2$. Свойства пространства $\sigma_2(H)$ можно найти в [17].

Каждому оператору $X \in \text{End } H$ ставятся в соответствие две матрицы: операторная, $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и числовая $X \sim (x_{ij})$, где $x_{ij} = (X e_j, e_i)$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим интегральный оператор $B \in \text{End } H$ с суммируемым с квадратом ядром по обоим аргументам $K : [0, \omega] \times [0, \omega] \rightarrow \mathbb{C}$

$$(Bx)(t) = \int_0^\omega K(t, s) x(s) ds,$$

тогда

$$B \in \sigma_2(H) \text{ и } \|B\|_2^2 = \int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt < \infty.$$

В пространстве H введем стандартный оператор инволюции формулой $(Jx)(t) = x(\omega - t)$, $t \in [0, \omega]$.

В H рассматривают следующие возмущенные операторы $L_i : D(A) \subset H \rightarrow H$, $i = \overline{1, 4}$:

$$L_1 = A - B, \quad L_2 = A - BJ, \quad L_3 = A - JB, \quad L_4 = A - JBJ.$$

Заметим, что оператор L_1 исследовался в работах [11–13], но нам также удобно привести соответствующие результаты в другой формулировке.

Сделаем несколько очевидных, но важных замечаний.

Замечание 1. Если $B \in \sigma_2(H)$, то операторы BJ, JB, JBJ также принадлежат $\sigma_2(H)$ и их нормы в $\sigma_2(H)$ совпадают.

Замечание 2. Оператор $J \in \text{End } H$ действует на собственные векторы $e_n(t)$, $t \in [0, \omega]$, $n \in \mathbb{Z}$ по формуле $Je_n(t) = e_{-n}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет матрицу вида $J \sim (j_{nl})$, $n, l \in \mathbb{Z}$, где

$$j_{nl} = \begin{cases} 1, & n = -l, \\ 0, & n \neq -l. \end{cases}$$

Замечание 3. Пусть $B \sim (b_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $b_{ij} = (Be_j, e_i)$, тогда операторы BJ, JB, JBJ имеют числовые матрицы $BJ \sim (b_{i,-j})$, $JB \sim (b_{-i,j})$, $JBJ \sim (b_{-i,-j})$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

2. Прямые суммы

Пусть в гильбертовом пространстве H есть ортогональный базис из подпространства $\{H_n, n \in \mathbb{Z}\}$ (см. [17]) таким образом, H представимо в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых подпространств

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n. \quad (1)$$

Следовательно, в H есть разложение единицы I системой ортопроекторов

$$I = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n, \quad P_n : H \rightarrow H_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Определение 1. [7] Линейный оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $A_n \in \text{End } H_n$, $n \in \mathbb{Z}$ относительно разложения (1):

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n. \quad (2)$$

если $H_n \subset D(A)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$; каждое подпространство H_n инвариантно относительно A и $A_n = A|_{H_n}$, $n \in \mathbb{Z}$; $Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n x_n$, $x \in D(A)$, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. [7] Пусть $U \in \text{End } H$ — обратимый оператор и пространство H представимо в виде (1). Тогда разложение пространства H в виде

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U H_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_n. \quad (3)$$

называется квазиортогональным или U -ортогональным. Последовательность подпространств \tilde{H}_n , $n \in \mathbb{Z}$, называется базисом Рисса из подпространств. Если же $U = I + W$, где $W \in \sigma_2(H)$, то базис Рисса называется базисом Бари из подпространств H (см. [17], [18]).

Определение 3. [7] Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — линейный замкнутый оператор. Он называется квазиортогональной (U -ортогональной) прямой суммой операторов \tilde{A}_n , $n \in \mathbb{Z}$ относительно разложения пространства H вида (3), если имеет место формула (2) и $\tilde{A}_n = U A_n U^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Основные результаты

Пусть I_k — тождественный оператор в H_k и $H = L_2[0, \omega]$. Тогда невозмущенный оператор A есть ортогональная прямая сумма операторов ранга один $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} i \frac{2\pi k}{\omega} I_k$ относительно разложения пространства H в прямую сумму вида (1), где $H_k = \text{Im } P_k = \text{Im } P(\{\lambda_k\}, A)$, $k \in \mathbb{Z}$. Для оператора A можно указать и другую прямую ортогональную сумму операторов вида $A = A_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j|>k} i \frac{2\pi j}{\omega} I_j \right)$, где $A_k = A|_{H_{(k)}}$ — сужение оператора A на подпространство $H_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}$ относительно представления пространства H в виде

$$H = H_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j|>k} H_j \right). \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть

$$\|B\|_2 < \frac{\pi}{2\omega}. \quad (5)$$

Тогда каждый из операторов L_i , $i = \overline{1, 4}$ подобен оператору $\tilde{L}_i = A - V_i$, $i = \overline{1, 4}$, где оператор $V_i \in \sigma_2(H)$ есть ортогональная прямая сумма $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_{ij}$ операторов ранга один. Имеют место равенства $L_i U_i = U_i \left(A - \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_{ij} \right)$, $i = \overline{1, 4}$, $U_i \in \text{End } H$, $U_i - I \in \sigma_2(H)$, и операторы L_i , $i = \overline{1, 4}$ представляют собой U_i — ортогональную, $i = \overline{1, 4}$, прямую сумму вида

$$L_i = U_i \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\lambda_j I_j - V_{ij}) \right) U_i^{-1}, \quad i = \overline{1, 4},$$

относительно U_i — ортогонального разложения пространства $H = L_2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} U_i H_j$.

Отметим, что условие (5) теоремы 1 довольно ограничительное и в теореме 1 матрицы операторов \tilde{L}_i , $i = \overline{1, 4}$ диагональные, а базис Рисса составлен из подпространств размерности 1. Если снять условие (5), то возможно приведение преобразованием подобия оператора L_i , $i = \overline{1, 4}$ к оператору \tilde{L}_i , $i = \overline{1, 4}$, но не диагонального, как в теореме 1, а блочно-диагонального вида.

Теорема 2. Существует такое натуральное $k > 0$, что каждый из операторов $L_i, i = \overline{1, 4}$ подобен оператору $\tilde{L}_i = A - V_p, i = \overline{1, 4}$, где $U_i \in \text{End } H$, $I - U_i \in \sigma_2(H)$, подпространства $H_{(k)} = \text{Im } P_{(k)} H_j = \text{Im } P_j, |j| > k$ инвариантны относительно операторов A и $V_p, i = \overline{1, 4}$. Операторы $L_p, i = \overline{1, 4}$ есть U_i — ортогональная, $i = \overline{1, 4}$, прямая сумма

$$L_i = U_i \left(A - \left(V_{i(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j| > k} V_{ij} \right) \right) \right) U_i^{-1}, i = \overline{1, 4}$$

относительно U_i — ортогонального разложения пространства $H = U_i H_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j| > k} U_i H_j \right)$. Операторы $V_{i(k)}, i = \overline{1, 4}$ имеют ранг $2k + 1$, операторы V_{ij} ранг один. Подпространства $\{U_i H_{(k)}, U_i H_j, |j| > k\}$ образуют базис Бари из подпространств, и, в частности, базис Рисса из подпространств.

Для описания асимптотики спектра операторов $L_i, i = \overline{1, 4}$ нами будет использоваться базахово пространство $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ суммируемых со степенью $1 \leq p < \infty$ двусторонних комплексных последовательностей с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^p \right)^{1/p}$, а также величины $\hat{k}(n, m), n, m \in \mathbb{Z}$ определяемые формулой

$$\hat{k}(n, m) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^\omega K(t, s) e_{-n}(t) e_{-m}(s) ds dt.$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 спектр каждого из операторов $L_i, i = \overline{1, 4}$ допускает представление вида

$$\sigma(L_i) = \sigma_{(k)}(L_i) \cup \left(\bigcup_{|j| > k} \{\lambda_j(L_i)\} \right), i = \overline{1, 4}, \quad (6)$$

где множества $\sigma_{(k)}(L_i), i = \overline{1, 4}$ содержат не более $2k + 1$ собственных значений,

$$\lambda_j(L_i) = \lambda_j - f_j(L_i) + \delta_j(L_i), |j| > k, i = \overline{1, 4}. \quad (7)$$

Последовательности $(\delta_j(L_i), j \in \mathbb{Z}), i = \overline{1, 4}$, принадлежат ℓ_1 , а числа $f_j(L_i)$ определяются формулами

$$f_j(L_1) = \hat{k}(j, -j), \quad f_j(L_2) = \hat{k}(j, j), \quad f_j(L_3) = \hat{k}(-j, -j), \quad f_j(L_4) = \hat{k}(-j, j), \quad |j| > k.$$

Следствие 1. При выполнении условия (5) формула (6) принимает вид $\sigma(L_i) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\lambda_j(L_i)\}, i = \overline{1, 4}$, а формула (7) имеет место для всех $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4. Собственные векторы $e_j(L_i), j \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, 4}$ при выполнении условия (5) образуют в H базис Рисса, базис Бари и имеют место формулы

$$e_j(L_i) = U_i e_j, \quad j \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, 4},$$

$$\|e_j(L_i) - e_j\| \leq \delta_j, \text{ где } \delta_j \in \ell_2.$$

Заключение

Операторы с инволюцией достаточно плотно исследуются в настоящее время. В данной работе для возмущенного дифференциального оператора первого порядка с интегральным возмущением, как с инволюцией, так и без нее, получены теоремы о подобии диагональному или блочно-диагональному оператору. Это соответствует представлению подобного данному оператора в виде ортогональной прямой суммы операторов конечного ранга. А также получены асимптотические оценки собственных значений и собственных векторов. Интерес представляют собственные значения, которые позволяют в дальнейшем выписать группу операторов, генератором которой является исследуемый оператор и применять ее в вопросе отыскания слабых и обычных решений некоторых классов задач.

Литература

1. Бурлуцкая М. Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и их приложения / М. Ш. Бурлуцкая // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2021. – № 5 – С. 89–97.
2. Бурлуцкая М. Ш. Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения / М. Ш. Бурлуцкая – Воронеж : Научная книга, 2020. – 224 с.
3. Бурлуцкая М. Ш. О некоторых свойствах дифференциальных уравнений и смешанных задач с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2019. – № 1 – С. 91–100.
4. Ashyralyev A. On the hyperbolic type differential equation with time involution / A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – № 1(109) – P. 38–47.
5. Bondarenko N. P. Inverse spectral problems for functional-differential operators with involution/ N. P. Bondarenko // Journal of Differential Equations. – 2022. – Vol. 318. – P. 169–186.
6. Криштал И. А. Спектральные свойства дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1091–1132.
7. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 9. – С. 1287–1291.
8. Баскаков А. Г. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 277–281.
9. Агафонкин Г. А. Спектральные свойства модели Фридрихса с инволюцией / Г. А. Агафонкин // Матем. заметки. – 2025. – № 117:1. – С. 3–15.
10. Границыкова Я. А. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией / Я. А. Границыкова, А. А. Шкаликов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 2022. – № 4. – С. 67–71.
11. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т.171. – С. 3–18.
12. Baskakov A. G. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova // J. Math. Anal. App. – 2019. – V. 477. – P. 930 –960.
13. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & Физика.– 2020. – Т. 52, № 3. – С. 185–194.
14. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т.52, №2. – С. 71–85.
15. Баскаков А. Г. Об алгебре интегральных операторов с инволюцией / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Итоги науки и техники. Современная математики и ее приложения. Тематические обзоры. – 2023. – Т. 230. – С. 41–49.
16. Гаркавенко Г. В. Об алгебрах операторов в функциональных пространствах с инволюцией. / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 22-й Саратовской зимней школы, посвященной 300-летию РАН. – Саратов : Саратовский государственный исследовательский университет. – 2024. – С. 65–68.

17. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
18. Фаге М. Н. Спрямление базисов в гильбертовом пространстве / М. Н. Фаге // Докл. АН СССР. – 1950. – 74, № 6. – С. 1053–1056.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСХОДОМ ЭНЕРГИИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ

Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Освоение человеком любого вида энергии имеет как положительные, так и отрицательные последствия. С одной стороны использование энергетических ресурсов, как способных к восстановлению, так и не способных позволяет производить продукты полезные для общества, пользоваться различными механизмами, которые улучшают качество жизни людей. Однако, процессы производства энергии и функционирование различных приборов, машин, устройств негативно влияют на окружающую среду. В этой связи возникают задачи определения такого режима использования ресурсов, который позволяет свести это отрицательное воздействие к минимуму и получить при этом максимальную пользу для человека.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понtryгина, дифференциальные уравнения, окружающая среда, потребление энергии, функция полезности.

Введение

Задача производства и рационального использования различных видов энергетических ресурсов с математической точки зрения приводит к задаче оптимального управления. Будем рассматривать процесс освоения одного вида энергии. Математическая модель в этом случае содержит величины, которые непрерывно меняются во времени и поэтому соединяются между собой дифференциальными связями. Задача сводится к максимизации некоторой величины, которая определяется функцией полезности.

Содержание

Введем в рассмотрение необходимые величины. Обозначим через $X(t)$ — количество энергии определенного вида, используемой при производстве товаров в момент времени t , через $v(t)$ — скорость расходования этой энергии в момент времени t . Будем считать, что время принимает значения на ограниченном промежутке $0 \leq t \leq T$. Нетрудно увидеть, что связь между этими величинами задается следующим дифференциальным уравнением

$$X'(t) = -v(t). \quad (1)$$

Пусть объем производимых товаров и услуг описывается функцией $c(v) > 0$. Понятно, что представляет интерес ситуация, когда с течением времени этот объем увеличивается и, следовательно, производная $c'(v) > 0$. Использование энергии в производственных целях, безусловно, приводит к негативному воздействию на окружающую среду. Для того, чтобы проследить масштаб загрязнения, введем в рассмотрение фактор-функцию $p(v) > 0$. Поскольку расход энергии приводит к усилению загрязнения, то ее производная $p'(v) > 0$. Будем считать, что окружающая среда способна к самоочищению при использовании определенного вида энергии. Пусть далее функция $U(c, p)$ устанавливает зависимость уровня полезности для общества использования энергии от величин $c(v)$ и $p(v)$. Функцию $U(c, p)$ часто называют функцией полезности [1]. Принимая во внимание смысл переменных $c(v)$ и $p(v)$ можно предположить, что функция полезности обладает следующими свойствами

$$\frac{\partial U}{\partial c} > 0, \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} < 0, \frac{\partial U}{\partial p} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial c} = 0. \quad (2)$$

Поскольку есть возможность выбирать рационально только темп использования энергетических ресурсов, то представляется естественным выбрать в данной задаче в качестве управляющей функцию $v(t)$, а в качестве функции состояния $X(t)$. Введем критерий оптимальности в виде

$$\int_0^T U(c(v(t)), p(v(t))) e^{\delta t} dt \rightarrow \max. \quad (3)$$

Такой функционал называется целевым функционалом с дисконтирующим множителем [2, 3]. Здесь $\delta > 0$ некоторая постоянная величина. Очевидно, что управляющая функция $v(t)$ принимает положительные значения, т. е. имеет место условие

$$v(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Зададим дополнительные граничные условия для функции состояния в виде

$$X(0) = X_0, \quad X(T) = X_T \geq 0. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) — это задача оптимального управления [4, 5]. Для ее решения будем применять принцип максимума Понтрягина. Для этого выпишем сначала функцию Гамильтона [6]. В данном случае она имеет представление

$$H(\lambda, v, c, p) = U(c, p) e^{\delta t} - \lambda v. \quad (6)$$

Здесь $\lambda(t)$ — сопряженная функция. На оптимальном управлении $v^*(t)$ функция Гамильтона — Понтрягина $H(\lambda, v, c, p)$ достигает своего максимального значения. Тогда имеет место равенство

$$U(\lambda^*, v^*, c(v^*), p(v^*)) = \max_{v(t) > 0} (U(c(v), p(v)) - \lambda v). \quad (7)$$

Точка максимума функции (6) обращает в ноль ее первую производную. Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \left(\frac{\partial U}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dv} + \frac{\partial U}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dv} \right) e^{\delta t} - \lambda(t) = 0. \quad (8)$$

Вторая производная, соответственно, на этой функции должна принимать отрицательное значение. А именно

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial c^2} \left(\frac{dc}{dv} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial c} \cdot \frac{d^2 c}{dv^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} \left(\frac{dp}{dv} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial p} \cdot \frac{d^2 p}{dv^2} \right] e^{\delta t} < 0. \quad (9)$$

Функция $\lambda(t)$ является решением сопряженного дифференциального уравнения

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}. \quad (10)$$

Поскольку функция Гамильтона — Понтрягина не зависит от переменной состояния, то получаем, что

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Следовательно, функция $\lambda(t)$ постоянна. Пусть $\lambda(t) = A$, где A некоторое число, для всех $t \in [0, T]$. Поскольку по условию задачи $X_T \geq 0$, то $\lambda(T) \geq 0$ и, значит, $A \geq 0$. Вернемся к уравнению (8) и немного преобразуем его. Получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dv} + \frac{\partial U}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dv} \right) e^{\delta t} = A$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dv} + \frac{\partial U}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dv} = A e^{-\delta t}. \quad (11)$$

Так как время присутствует в этом уравнении, то искомая функция скорости зависит от t . Нетрудно увидеть, что в левой части соотношения (11) находится полный дифференциал функции полезности $U(c, p)$. Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$dU(c, p) = Ae^{-\delta t}.$$

Учитывая, что обе переменные c и p являются функциями скорости, получаем соотношение

$$\frac{dU}{dv} - Ae^{-\delta t} = 0. \quad (12)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию $S(t) = -Ae^{-\delta t}$. С ее помощью уравнение (12) можно переписать в виде

$$U'(v) + S(t) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что

$$S'(t) = A\delta e^{-\delta t} = -\delta S(t).$$

Отсюда следует представление

$$\frac{S'(t)}{S(t)} + \delta = 0. \quad (14)$$

С другой стороны из уравнения (13), очевидно, вытекают равенства

$$\begin{cases} S(t) = -U'(v), \\ S'(t) = -U''(v) \cdot v'(t). \end{cases} \quad (15)$$

Подставим представления (15) в (14). Получим следующее уравнение

$$\frac{U''(v)}{U'(v)} \cdot v'(t) + \delta = 0. \quad (16)$$

Выразим из (16) производную управляющей функции $v(t)$ и выпишем дифференциальное уравнение для ее нахождения. Оно имеет вид

$$v'(t) = -\left(\frac{U''(v)}{U'(v)}\right)^{-1} \delta. \quad (17)$$

Остается только проинтегрировать полученное уравнение и вычислить значение функционала (3) на оптимальном решении.

Проиллюстрируем приведенные рассуждения на примере. Предположим, что функции $c(v)$ и $p(v)$ выбраны таким образом, что справедливы все предположения оптимизационной задачи (1)–(5), а функция полезности после соответствующих подстановок имеет вид

$$U(v) = \sqrt{v} + L, \quad (18)$$

где L — некоторое положительное число. Проверим свойства для $U(v)$. Получим

$$U'(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} > 0 \quad \text{и} \quad U''(v) = -\frac{1}{4\sqrt{v^3}} < 0.$$

Функция $U(c, p)$ может выглядеть, например, следующим образом

$$U(c, p) = \sqrt{c} - p^2.$$

Убедимся, что все требования из условий (2) выполнены. Для этого проверим знаки всех производных первого и второго порядков. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial c} &= \frac{1}{2\sqrt{c}} > 0, & \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} &= -\frac{1}{4\sqrt{c^3}} < 0, & \frac{\partial U}{\partial p} &= -2p < 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} &= -2, & \frac{\partial^2 U}{\partial c \partial p} &= 0. \end{aligned}$$

Составим теперь уравнение для нахождения управляющей функции скорости. Оно имеет следующий вид

$$v'(t) = -\left(-\frac{1}{4\sqrt{v^3}} \div \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)^{-1} \delta = -\left(-\frac{1}{2v}\right)^{-1} \delta.$$

Отсюда вытекает, что уравнение для определения оптимального управления имеет вид

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\delta v. \quad (19)$$

Проинтегрировав равенство (19), находим общую формулу для решения задачи в виде

$$v(t) = c \cdot e^{2\delta t}. \quad (20)$$

Подставим теперь функцию (20) в равенство (1). Получим соотношение для определения функции состояния в виде

$$\frac{dX(t)}{dt} = -c \cdot e^{2\delta t}.$$

Общее решение такого дифференциального уравнения имеет вид

$$X(t) = -\frac{c}{2\delta} e^{2\delta t} + c_1.$$

Осталось воспользоваться граничными условиями (5). А именно

$$X(0) = -\frac{c}{2\delta} + c_1 = X_0, \quad X(T) = -\frac{c}{2\delta} e^{2\delta T} + c_1 = X_T.$$

Вычисляем значения констант c и c_1 . Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2\delta} e^{2\delta T} + \frac{c}{2\delta} &= -X_T - X_0, \\ \frac{c}{2\delta} (1 - e^{2\delta T}) &= X_T - X_0. \end{aligned}$$

После небольших преобразований имеем

$$c = \frac{(X_T - X_0)2\delta}{1 - e^{2\delta T}}, \quad c_1 = X_0 + \frac{c}{2\delta} = X_0 + (1 - e^{2\delta T})^{-1}(X_T - X_0).$$

Таким образом оптимальная управляющая функция имеет вид

$$v^*(t) = (1 - e^{2\delta T})^{-1} 2\delta (X_T - X_0) e^{2\delta t}. \quad (21)$$

Принимая во внимание, что запас энергии со временем истощается, очевидно, что справедливо неравенство

$$X_T < X_0.$$

Отсюда понятно, что условие для скорости $v^*(t) > 0$ не нарушено. Остается найти оптимальное значение функционала (3). Получаем в нашем случае

$$\begin{aligned} \int_0^T (((1 - e^{2\delta T})^{-1} 2\delta (X_T - X_0))^{1/2} e^{\delta t} + L e^{\delta t}) dt &= \left(\frac{1}{\delta} ((1 - e^{2\delta T})^{-1} 2\delta (X_T - X_0))^{1/2} e^{\delta t} + \frac{L}{\delta} e^{\delta t} \right) \Big|_0^T = \\ &= \frac{1}{\delta} (e^{\delta T} - 1) (((1 - e^{2\delta T})^{-1} 2\delta (X_T - X_0))^{1/2} + L). \end{aligned}$$

Заключение

Таким образом, в работе удалось построить уравнение, которое позволяет аналитически вычислять управляющую функцию и находить оптимальный режим расхода энергии и воздействия на окружающую среду. Заметим, что присутствие в целевом функционале дисконтирующего множителя исключает наличие стационарного оптимального режима управления.

Литература

1. *Протодьяконов И. О. Основы теории оптимизации / И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев, В. Д. Ногин. – Москва : Высшая школа, 1986. – 384 с.*
2. *Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2006. – 583 с.*
3. *Андреева Е. А. Модели управляемых систем. / Е.А. Андреева, Ю.А. Пустарнакова, Н. А. Семыкина [и др.]. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 1999. – 122 с.*
4. *Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория / В. И. Благодатских. – Москва : Высшая школа, 2001. – 238 с.*
5. *Алексеев В. В. Оптимальное управление / В. В. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – Москва: Наука, 1979. – 378 с.*
6. *Понtryгин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе [и др.]. – Москва : Наука, 1969. – 384 с.*

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. В. Богатов

ПАО «Банк ПСБ»

Аннотация. В докладе рассматривается задача с нелокальным интегральным условием первого рода для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, которое можно рассматривать как обобщение уравнения Буссинеска — Лява. Особенностью задачи является то, что для рассматриваемого уравнения можно поставить и начально-краевые задачи, и задачи типа задачи Гурса. В этом случае для доказательства разрешимости можно применить как классические, так и нестандартные методы. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Доказательство базируется на априорных оценках. **Ключевые слова:** нелокальная задача, интегральные условия, уравнение четвертого порядка, разрешимость задачи, пространства Соболева.

Введение

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают вызывать интерес исследователей, что связано с их приложениями [1].

Большинство работ по этой тематике связано с изучением задач для уравнений второго порядка.

В докладе рассматривается задача с нелокальным интегральным условием для уравнения четвертого порядка, которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска — Лява. Для этого уравнения можно поставить как начально-краевые задачи, так и задачи типа задачи Гурса. Это обстоятельство, а также вид нелокального условия, позволили разработать новый подход к доказательству разрешимости поставленной нелокальной задачи и реализовать его.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (au_x)_x - bu_{xxt} + cu = f(x, t), \quad (1)$$

где $a(x, t) > 0$ всюду в $\overline{Q_T}$, $b(t) > 0$ в $[0, T]$ и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

краевому условию

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальному условию

$$\int_0^l K(x, t)u(x, t)dx = h(t). \quad (4)$$

Заметим, что задачу (1)–(4) можно трактовать как интегральный аналог задачи Гурса, так как условие $b(t) \neq 0$ позволяет интерпретировать уравнение (1) как уравнение с доминирующей смешанной производной [2]. Это наблюдение дает возможность выбрать для обоснования разрешимости задачи удобный метод [3]. С другой стороны, можно применить к обоснованию разрешимости поставленной задачи и метод, традиционный для краевых задач. Обсуждению этих методов и будет посвящен доклад, в котором представлен и полученный результат.

2. Основной результат

Покажем, что решение поставленной задачи существует и единственно. Первым шагом к обоснованию разрешимости задачи (1)–(4) является следующее утверждение.

Лемма. *Если $a \in C^1(\bar{Q}_T)$, $c, f \in C(\bar{Q}_T)$, $b \in C(\bar{Q}_T)$, $K \in C^2(\bar{Q}_T)$, $\phi \in C[0, T]$, $\psi \in C[0, T]$, $K(l, t) \neq 0$ и выполняются условия согласования*

$$\int_0^l K(x, 0)\phi(x)dx = h(0), \int_0^l K_t(x, 0)\phi(x)dx + \int_0^l K(x, 0)\psi(x)dx = h'(0), \quad (5)$$

то задача (1)–(4) эквивалентна задаче для уравнения (1) с условиями (2), (3) и нелокальным условием второго рода

$$a(l, t)u_x(l, t) + b(t)u_{xt}(l, t) = B(u), \quad (6)$$

где B не содержит производных по пространственной переменной.

В рамках доказательства было получено следующее условие

$$a(l, t)u_x(l, t) + b(t)u_{xt}(l, t) = \frac{1}{K(l, t)} \left[h''(t) - \int_0^l K f dx - \int_0^l [K_{tt} + (K_x a)_x - Kc] u dx + K_x(l, t)a(l, t)u(l, t) - K_x(0, t)a(0, t)u(0, t) + b(t)K_x(l, t)u_{tt}(l, t) - b(t)K_x(0, t)u_{tt}(0, t) - b \int_0^l K_{xx} u_{tt} dx - 2 \int_0^l K_t u_t dx \right]. \quad (7)$$

Условие (7) является нелокальным интегральным условием второго рода, содержащим производные по пространственной переменной во внерадиальном члене.

Также было показано обратное, что $u(x, t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), (7) и выполняются условия согласования (5).

Таким образом, эквивалентность задач была доказана, поэтому будем рассматривать вопрос о существовании решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), (7).

Не ограничивая общности, положим $\phi(x) = \psi(x) = 0$, а также выберем $K(x, t)$ так, чтобы $bK_{xx} - 2K = 0$, $K_x(0, t) = 0$. Тогда условие (7) примет вид

$$a(l, t)u_x(l, t) + b(t)u_{xt}(l, t) = \frac{1}{K(l, t)} \left[h''(t) - \int_0^l K f dx - \int_0^l H(x, t)u dx + K_x(l, t)a(l, t)u(l, t) + b(t)K_x(l, t)u_{tt}(l, t) - 2 \int_0^l K_t u_t dx \right], \quad (8)$$

где $H(x, t) = K_{tt} + (K_x a)_x - Kc$.

Будем также считать $b = \text{const}$, $b > 0$, что не слишком ограничивает общность, но упрощает выкладки.

Итак, рассмотрим задачу отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), (8). Назовем ее *задача 2*.

Обозначим

$$W(Q_T) = u : u \in W_2^1(Q_T), u_{xt} \in L_2(Q_T),$$

$$\hat{W}(Q_T) = v : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0.$$

Следуя процедуре [4] и предположив, что $u(x, t)$ — классическое решение задачи, приходим к определению.

Определение. Обобщенным решением задачи 2 будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + c u v) dx dt - \int_0^T v(l, t) b u_{xt}(l, t) dt - \int_0^T v(l, t) a(l, t) u_x(l, t) dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt \quad (9)$$

для всех $v \in \hat{W}(Q_T)$.

Из (9) с учетом (8) получим:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + c u v) dx dt - \int_0^T v(l, t) \frac{1}{K(l, t)} [K_x(l, t)a(l, t)u(l, t) -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^l K_t u_t dx + \int_0^l H(x, t) u dx] dt + \\
& + \int_0^T (v(l, t) \frac{K_x(l, t)}{K(l, t)})_t u_t(l, t) dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt + \int_0^T \frac{v(l, t)}{K(l, t)} [h''(t) - \int_0^l K f dx] dt. \tag{10}
\end{aligned}$$

Теорема. Если $a \in C^1(\bar{Q}_T)$, $c \in C(\bar{Q}_T)$, $K \in C^2(\bar{Q}_T)$, $h \in C^2[0, T]$, $K(l, t) \neq 0$, $K_x(l, t)K(l, t) > 0$, то существует единственное обобщенное решение задачи 2.

Сначала была доказана единственность решения из предположения, что существует два различных решения задачи 2 $u_1(l, t)$ и $u_2(l, t)$. Тогда их разность должна удовлетворять тождеству

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{xt} v_{xt} + c u v) dx dt - \int_0^T v(l, t) \frac{1}{K(l, t)} [K_x(l, t) a(l, t) u(l, t) - \\
& - 2 \int_0^l K_t u_t dx + \int_0^l H(x, t) u dx] dt + \int_0^T (v(l, t) \frac{K_x(l, t)}{K(l, t)})_t u_t(l, t) dt = 0, \tag{11}
\end{aligned}$$

и $u(x, 0) = 0$.

С помощью ряда преобразований, применения оценок (в том числе с помощью неравенств Коши и Коши — Буняковского) и, следуя известной процедуре [5], мы убедились в том, что $u(x, t) = 0$ в Q_T , что и доказывает невозможность существования более одного решения задачи 2.

Существование решения было доказано с помощью поиска приближенных решений задачи 2 в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) w_k(x),$$

где $w_k(x) \in C^2[0, l]$ линейно независимы, образуют полную систему в $W_2^1(0, l)$ из соотношений

$$\begin{aligned}
& \int_0^l (u_{tt}^m w_i + a u_x^m w_i' + b u_{xt}^m w_i' + c u^m w_i) dx - w_i(l) \frac{1}{K(l, t)} [K_x(l, t) a(l, t) u^m(l, t) - 2 \int_0^l K_t u_t^m dx + \int_0^l H u^m dx] + \\
& + b K_x(l, t) u_{tt}^m(l, t) = \int_0^l f w_i(x) dx + w_i(l) \frac{1}{K(l, t)} (h''(t) - \int_0^l K f dx). \tag{12}
\end{aligned}$$

Равенство (12) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_{km}(t)$:

$$\sum_{k=1}^m A_{ki} c_{km}'' + \sum_{k=1}^m B_{ki} c_{km}'(t) + \sum_{k=1}^m D_{ki} c_{km} = g_i(t), \tag{13}$$

Добавив к (13) начальное условие $c_{km}(0) = c_{km}'(0) = 0$, получим задачу Коши. Далее, рассматривая квадратичную форму, мы показали, что определитель матрицы $\|A_{ki}\| > 0$ для любого m . Приходим к тому, что Условия теоремы и выбор $\{w_k(x)\}$ гарантируют, что $\|A_{ki}\| > 0$. Учитывая условия теоремы можно утверждать, что последовательность приближенных решений построена. Применяя ту же технику, что и при доказательстве единственности, нетрудно получить оценку $\|u^m\| \leq P$, следствием которой является возможность выделить слабосходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность. На завершающем этапе доказательства убеждаемся в том, что предел выделенной подпоследовательности есть искомое решение, переходя к пределу и руководствуясь рассуждениями в [4]. Таким образом, теорема полностью доказана.

Заключение

Таким образом, была поставлена задача с нелокальным интегральным условием первого рода для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, получено обобщенное решение задачи. Получены необходимые оценки и проведены преобразования для доказательства разрешимости поставленной задачи.

Благодарности

Автор благодарит Людмилу Степановну Пулькину за помощь в постановке задачи и внимание к работе.

Литература

1. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
2. Жегалов В. И. Уравнения с доминирующей частной производной / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, У.А. Уткина – Казань : Казанский ун-т, 2014. – 385 с.
3. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками / Пулькина Л. С. //Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 139. – С. 214–230.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики : учеб. пособие / О. А. Ладыженская – Москва : Наука, 1973. – 407 с.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ КРИВИЗНЫ КРИВОЙ С КРИВИЗНОЙ ЕЕ ЭВОЛЮТЫ

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт

Аннотация. В работе изучается связь кривизны кривой с кривизной ее эволюты. Предложен способ нахождения соответствующих точек, кривизны которых находятся в заданном соотношении. Результат проанализирован на конкретных примерах циклоиды и эллипса.

Ключевые слова: кривизна кривой, эволюта, эвольвента, циклоида, эллипс, астроида, численное решение.

Введение

Известно, что эволютой заданной кривой (эвольвенты) называется геометрическое место точек центров кривизны эвольвенты [1–4]. Уравнение эволюты заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ может быть записано в виде [1–4]:

$$\begin{cases} x_e = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ y_e = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{cases}$$

Отсюда следует, например, что (см. [1–4]):

1. Эволютой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ служит циклоида $x_e = a(t + \sin t)$, $y_e = -a(1 - \cos t)$.
2. Эволюта эллипса $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ это астроида $x_e = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$, $y_e = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t$ (рис. 2).
3. Эволютой параболы $y^2 = 2px$ является полукубическая парабола $y_e^2 = \frac{8}{27p} (x_e - p)^3$, где $y_e = -\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$, $x_e = 3x + p$.

Также хорошо известны свойства эволюты, связанные с поведением своей эволюты [1–4], а именно:

1. Касательная к эволюте является нормалью к данной кривой.

2. Если на некотором участке кривой радиус кривизны изменяется монотонно, то абсолютное значение приращения длины дуги эволюты равно соответствующему абсолютному приращению радиуса кривизны данной кривой, $|ds_e| = |dR|$.

В настоящей работе мы покажем, что кривизны кривой и ее эволюты тесно взаимосвязаны между собой. И далее найдем аналитическое выражение для этой взаимосвязи, позволяющее, например, находить соответствующие точки с одинаковой или любой наперед заданной кривизной.

1. Вывод основных соотношений

В начале определим полезное понятие соответствующих точек на кривой и ее эволюте: точку T кривой и центр кривизны кривой T_e , лежащий на эволюте, будем считать соответствующими (рис. 1).

Очевидно, что $|TT_e| = R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, где $y = y(x)$ — уравнение заданной кривой. По определению кривизны $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$, $K_e = \left| \frac{d\alpha_e}{ds_e} \right|$, где $d\alpha_e$ и $d\alpha$ дифференциалы углов касательной, ds_e и ds дифференциалы длин дуг эволюты и ее эвольвенты соответственно. Из приведенных выше свойств и рис. 1 следует, что $\alpha_e = \alpha - \frac{\pi}{2}$, т. е. $d\alpha_e = d\alpha$. Поэтому отношение кривизны эвольвенты к кривизне ее эволюты подчиняется условию $\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{ds_e}{ds} \right|$. Рассмотрим случай, когда кривая задана в декартовых координатах $y = y(x)$. Тогда последнее равенство можно переписать в явном виде:

$$\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{ds_e}{ds} \right| = \left| \frac{\sqrt{1+y'^2} dx_e}{\sqrt{1+y'^2} dx} \right|. \quad (1)$$

Из приведенного выше равенства $|ds_e| = |dR|$ следует, что $\left| \sqrt{1+y'^2} dx_e \right| = |R' dx|$, откуда

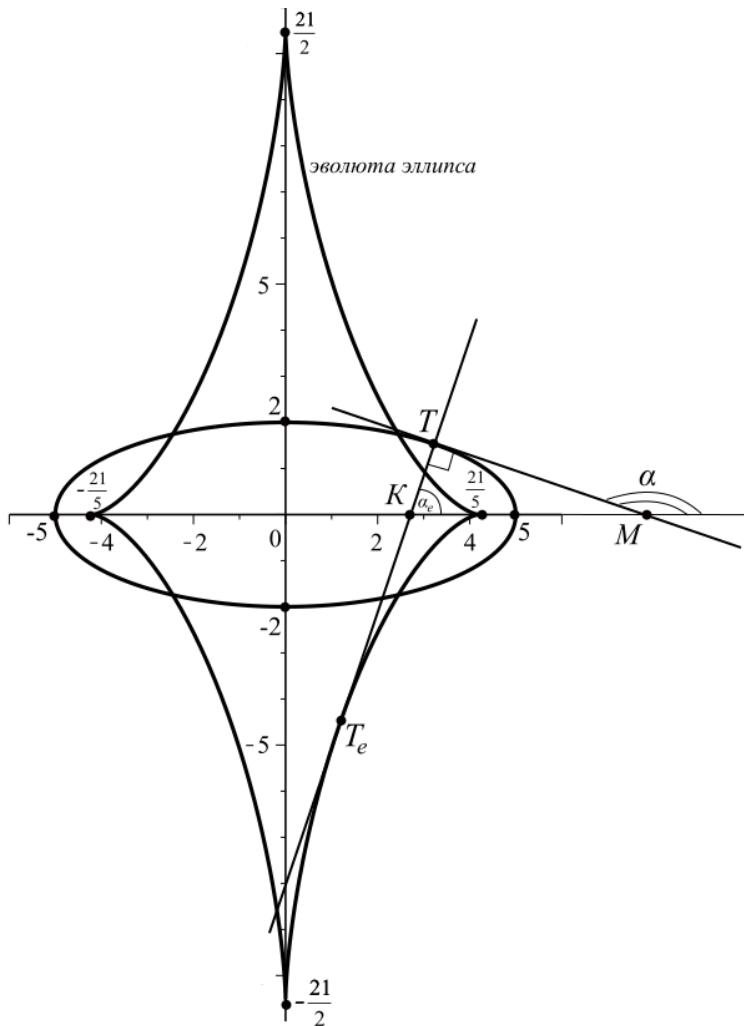


Рис. 1. Астроида $x = \frac{21}{5} \cos^3 t$, $y = -\frac{21}{2} \sin^3 t$ является эволютой эллипса $x = 5 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

Отрезок TT_e равен радиусу кривизны эллипса в точке T . Точка эллипса T и точка астроиды T_e соответствуют друг другу

$$\left| \frac{dx_e}{dx} \right| = \left| \frac{R'}{\sqrt{1+y_e'^2}} \right|. \quad (2)$$

Подставляя соотношение (2) в равенство (1), получим:

$$\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{R'}{\sqrt{1+y'^2}} \right|. \quad (3)$$

Аналогичные рассуждения приведут к соответствующим соотношениям для кривых, заданных параметрически или в полярных координатах:

$$\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right|, \quad \left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{R_\varphi'}{\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}} \right|. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) позволяют сравнить кривизны в соответствующих точках кривой и ее эволюты, не обращаясь непосредственно к уравнению последней.

3. Анализ полученных результатов

3.1. Циклоида и ее эволюта

Абсолютная величина радиуса кривизны циклоиды, исходя из ее параметрического уравнения $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ есть $|R| = 4a \sin \frac{t}{2}$. Значит, согласно формуле (4), отношение кривизны циклоиды к кривизне ее эволюты $x_e = a(t + \sin t)$, $y_e = -a(1 - \cos t)$ будет

$$\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|. \quad (5)$$

Очевидным следствием равенства (5) является тот факт, что конкретные значения параметра $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ задают те пары соответствующих точек на этих циклоидах, в которых их кривизны равны, причем $K = \frac{1}{2a\sqrt{2}}$. Рис. 2 иллюстрирует сказанное, где $TT_e = R = 2a\sqrt{2}$.

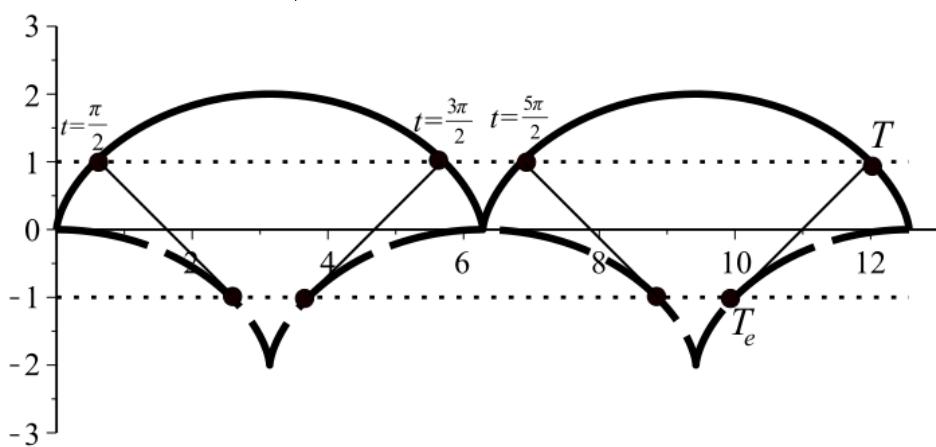


Рис. 2. Эволюта циклоиды выделена пунктиром. В построении учтено, что $a = 1$

3.2 Эллипс и его эволюта

Пример с эллипсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$, кривизна которого равна $K = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$, и его эволютой, уравнение которой представляет собой астроиду $x_e = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$, $y_e = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t$, менее тривиален:

$$\left| \frac{K}{K_e} \right| = \left| \frac{3ab(a^2 - b^2) \sin 2t}{2(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)} \right|. \quad (6)$$

Нахождение пары соответствующих точек с одинаковой кривизной на эллипсе и его астроиде требует решения уравнения

$$2(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) = 3ab |(a^2 - b^2) \sin 2t|, \quad (7)$$

сама возможность решения которого существенно зависит от геометрических параметров эллипса a и b .

При этом принципиально важным является выполнение условия

$$|\sin 2t| = \frac{2(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{3ab |a^2 - b^2|} \leq 1,$$

из которого следует, что соотношения между a и b должны быть такими:

$$\begin{cases} \frac{3ab |a^2 - b^2| - 2b^2}{2(a^2 - b^2)} \geq 0, & \text{если } a > b, \\ \left| \frac{3ab |a^2 - b^2| - 2b^2}{2(a^2 - b^2)} \right| \leq 1, & \text{если } a < b. \end{cases} \quad (8)$$

Эллипс, изображенный на рис. 1, с параметрами $a = 5$ и $b = 2$ удовлетворяет верхнему условию (8), т. е. уравнение (7) разрешимо. А это значит, что на этом эллипсе и его эволюте есть пара (пары) соответствующих точек с одинаковой кривизной. Действительно, численное решение уравнения (7) после подстановки в него значений $a = 5$ и $b = 2$ приводится к виду

$$25 \sin^2 t + 4 \cos^2 t = 315 \sin 2t. \quad (9)$$

Результат решения проиллюстрирован на рис. 3.

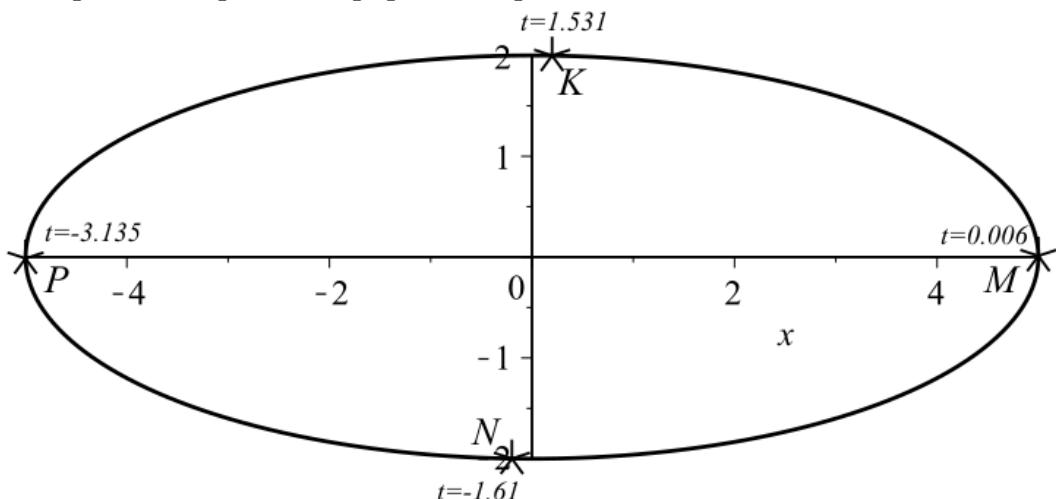


Рис. 3. На эллипсе $x = 5 \cos t$, $y = 2 \sin t$ отмечены точки, соответствующие решению уравнения (9)

На рис. 4 хорошо видно, что в соответствующих точках K и K_e , N и N_e эллипс и его эволюта искривлены совершенно одинаково, что естественным образом следует из формул (6), (7) и (9).

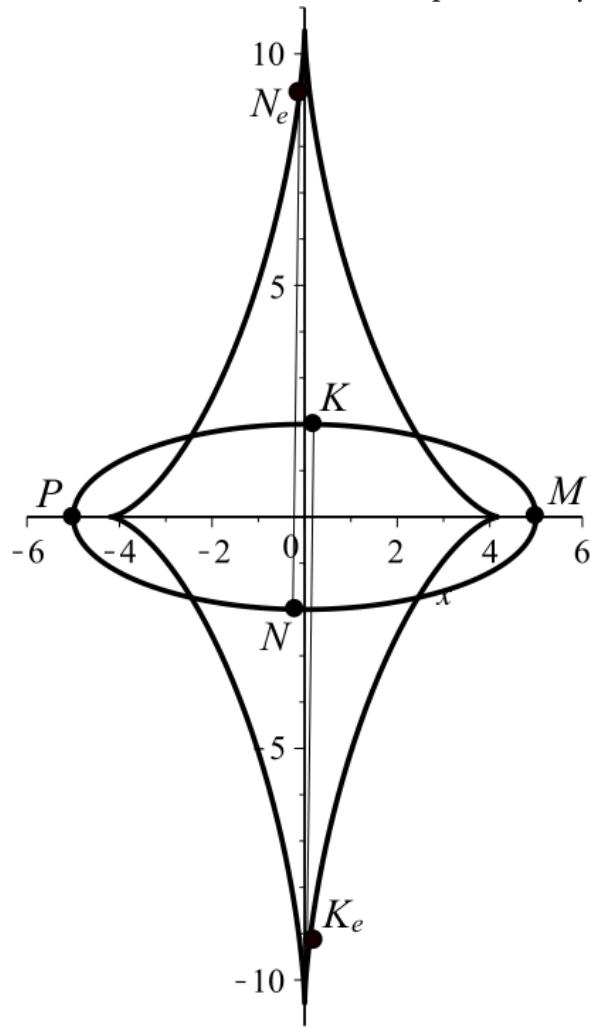


Рис. 4. В отмеченных соответствующих точках эллипса и его эволюты обе линии искривлены одинаково

Заключение

В заключение работы отметим два основных момента.

1. Приводится сравнение кривизны кривой с кривизной ее эволюты в соответствующих точках.
2. Найдены пары соответствующих точек с равными кривизнами на циклоиде, эллипсе и их эволютах.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Физматгиз, 1962. – 607 с.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов. – Москва : Физматлит, 1967. – 655 с.
3. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии / А. П. Норден. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы. 1958. – 244 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1966. – 552 с.

О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Н. Д. Борисов¹, В. В. Нефедов²¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются задачи динамики и предельного поведения репликаторных (нелинейных) систем дифференциальных уравнений в частных производных. Основное внимание уделяется влиянию пространственного фактора на поведение распределённых систем, описываемых уравнениями с частными производными. Рассматривается общая постановка задачи с граничными условиями Неймана, Дирихле и Робина, а также анализируются пространственно-однородные и неоднородные стационарные положения равновесия. Устойчивость этих положений изучается с использованием спектрального анализа и энергетического метода, включая обобщение на различные типы граничных условий. В работе показано, что при достаточно больших коэффициентах диффузии решения стремятся к стационарному режиму, причём условия Дирихле и Робина усиливают устойчивость по сравнению с условиями Неймана. Приводятся примеры, такие как уравнение Фишера — Колмогорова и двухкомпонентная система, иллюстрирующие применение предложенных методов. Результаты подчёркивают важность учёта граничных условий и диффузии для предсказания долгосрочного поведения систем «реакция-диффузия».

Ключевые слова: реакция-диффузия, нелинейные системы, частные производные, пространственная устойчивость, граничные условия, условия Неймана, условия Дирихле, условия Робина, стационарное равновесие, спектральный анализ, энергетический метод, пространство Соболева, уравнение Фишера — Колмогорова, диффузионные потоки, асимптотическая устойчивость.

Введение

Рассмотрим общую постановку такой задачи.

Пусть в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задана система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + f(u), \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Здесь $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, m$, является симметрической матрицей, имеющей вещественные положительные собственные значения.

В начальный момент времени заданы начальные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

а на границе $\partial\Omega$ области Ω заданы однородные граничные условия 2-го рода (условия Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3)$$

где $\partial\nu$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Система (1)–(3) является замкнутой, т. к. потоки реагирующих компонент через границу области равны нулю. В литературе такие системы получили название систем типа «реакция-диффузия».

Здесь вектор-функция $f(u)$ определяет реакцию компонентов, которая описывается динамической системой:

$$\frac{du}{dt} = f(u).$$

Матрица коэффициентов $A(x)$ описывает диффузионные потоки, возникающие в области Ω .

В классическом случае рассматриваются диагональные матрицы $A(x)$. В этом случае не учитываются так называемые кросс-диффузионные потоки, когда диффузионный поток одной из компонент системы оказывает влияние на динамику другой компоненты.

В этой работе мы будем далее рассматривать слабые решения [2] задачи (1)–(3), которые являются элементами (при каждом фиксированном $t \geq 0$) пространства Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ с нормой

$$u_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}$$

и при любых $t \geq 0$ представляют гладкие функции по переменной t .

Класс таких функций, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, будем обозначать далее как V .

1. Стационарные положения равновесия

Определение 1. Вектор-функция $\bar{u}(x) \in V$ такая, что:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \right) + f(\bar{u}) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4)$$

называется стационарным положением равновесия системы (1)–(3).

Если положение равновесия $\bar{u}(x) \neq \text{const}$, то его называют пространственно неоднородным. Задача об отыскании пространственно неоднородных равновесий весьма сложна. Будем предполагать, что $\bar{u}(x)$ — пространственно-однородное положение равновесия, т. е. существует решение задачи:

$$f(\bar{u}) = 0. \quad (5)$$

Исследование таких положений равновесия дает информацию о предельном положении системы (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$. Как и в случае динамических систем, введем аналог понятия устойчивости по Ляпунову стационарных положений равновесия.

Определение 2. Положение равновесия $\bar{u}(x)$ системы (1)–(3) называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $u_0 \in V$ решений $u(t, x)$ системы (1)–(3) с начальными данными u_0 такими, что $u_0 - \bar{u}_v < \delta$, при всех $t \geq 0$, $u(t, .) - \bar{u}_v < \varepsilon$. Если, кроме того, выполняется условие $u(t, .) - \bar{u}_v \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, то положение равновесия называется асимптотически устойчивым.

Пусть далее $\bar{u}(x)$ — пространственно-однородное положение равновесия системы (1)–(3).

Рассмотрим матрицу Якоби вектор-функции f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}).$$

Исследование устойчивости положения равновесия можно осуществить с помощью анализа теоремы Ляпунова — Пуанкаре об устойчивости по первому приближению [4]. И оно тогда сводится к исследованию спектра следующей задачи на собственные значения:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + J\phi = \lambda\phi, \quad x \in \Omega \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Если для всех собственных значений задачи (6) выполняется условие $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$, $k = 1, 2, \dots$, то положение равновесия является асимптотически устойчивым. Точную формулировку этой теоремы можно найти в [5].

Рассмотрим линейное преобразование $v = P^{-1}\phi$, где P — матрица такая, что $P^TJP = \Lambda$, P^T — транспонированная матрица.

С учетом этого преобразования спектральная задача (6) принимает вид:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \Lambda v = \lambda v, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Решение задачи (7) будем искать в виде:

$$v(x) = \sum c_k \psi_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где ψ_k , $k = 1, 2, \dots$, собственные функции следующей краевой задачи на собственные значения:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = -\mu \psi, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega.$$

Известно [3], что задача (9) имеет биортонормированную систему собственных функций ψ_k , которые образуют полную систему в пространстве $L^2(\Omega)$, причем выполняется:

$$(\psi_k, \psi_l)_{L^2(\Omega)} = \int \psi_k \psi_l dx = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (10)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$$

С учетом представления (8) исходная задача принимает вид:

$$\sum (-\mu_k c_k \psi_k + \Lambda c_k \psi_k) = \lambda \sum c_k \psi_k.$$

Если умножить это равенство скалярно в пространстве $L^2(\Omega)$ на функции ψ_l , $l = 1, 2, \dots$, и воспользоваться соотношением (10), то получим матричные равенства для векторов c_k в форме задач на собственные значения:

$$(\Lambda - \mu_k I) c_k = \lambda c_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Таким образом, задача об отыскании собственных значений континуальной системы (6) сводится к алгебраической задаче о собственных значениях счетной последовательности матриц вида:

$$\lambda_{k,j} = \gamma_j - \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

Если для всех собственных значений задачи (11) выполняется условие:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{k,j}) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n,$$

то пространственно-однородное положение равновесия \bar{u} системы (1)–(3) является устойчивым.

Если же хотя бы для одного значения k, j это условие не выполняется, то положение равновесия неустойчиво.

2. Примеры

Рассмотрим несколько примеров применения сформулированных результатов к конкретным задачам.

2.1. Пример 1

Запишем уравнение Фишера — Колмогорова на интервале $\Omega = (0, \pi)$ с однородными краевыми условиями Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u), \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\pi, t) = 0, \quad t > 0. \quad (14)$$

Это уравнение имеет два пространственно-однородных положения равновесия $u = 0$ и $u = 1$. Второе положение равновесия определяется собственными функциями и собственными значениями задачи (9):

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx), \quad \mu_k = k^2 D, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Равенство (12) принимает вид:

$$\lambda_k = -1 - k^2 D, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, положение равновесия $u = 1$ является асимптотически устойчивым.

В случае $u = 0$ из равенства (12) получим, что $\lambda_k = 1 - k^2 D$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, положение равновесия неустойчиво, т. к. $\lambda_0 = 1 > 0$.

2.2. Пример 2

Рассмотрим еще один пример системы типа «реакция-диффузия». Исследуем влияние диффузии на поведение замкнутой системы «реакция-диффузия» общего вида при $t \rightarrow \infty$. Остановимся на случае $n = 2$.

Итак, рассмотрим систему вида:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + f_1(u_1, u_2), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + f_2(u_1, u_2), \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (15)$$

где $u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$. Здесь d_1 и d_2 — коэффициенты диффузии, а Δ — оператор Лапласа.

Функции u_1 и u_2 удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы):

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial \Omega, t > 0 \quad (16)$$

на границе $\partial \Omega$ ограниченной замкнутой области Ω и однородным начальным условиям:

$$u_1(x, 0) = u_{1,0}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{2,0}(x), \quad x \in \Omega \quad (17)$$

Для определенности будем предполагать, что область Ω является квадратом:

$$\Omega = [0, \pi] \cdot [0, \pi].$$

Вектор-функция $f(u)$ определяет реакцию компонентов системы (15)–(17), которая описывается динамической системой:

$$\frac{du}{dt} = f(u).$$

Матрица $A(x) = \text{diag}(d_1, d_2)$ описывает диффузионные потоки, возникающие в области Ω . Решения системы (15)–(17) будем рассматривать в пространстве Соболева $W^{1,2}(\Omega)$.

Для исследования поведения решений системы (15)–(17) при $t \rightarrow \infty$ воспользуемся энержетическим (вариационным) методом [1, 3, 5].

Для этого введем в рассмотрение (вариационную) функцию времени:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int (u_1^2 + u_2^2) dx, \quad (18)$$

которая играет роль энергии системы.

Вычислим производную функции (18) с учетом (15)–(17). Получим, что:

$$\frac{dE}{dt} = - \int (d_1 |\nabla u_1|^2 + d_2 |\nabla u_2|^2) dx + \int (u_1 f_1(u_1, u_2) + u_2 f_2(u_1, u_2)) dx \quad (19)$$

Формулу (19) можно представить в виде:

$$\frac{dE}{dt} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = - \int (d_1 |\nabla u_1|^2 + d_2 |\nabla u_2|^2) dx, \quad (20)$$

$$I_2 = \int (u_1 f_1(u_1, u_2) + u_2 f_2(u_1, u_2)) dx. \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \min(d_1, d_2), \quad \beta = \sup_{u \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|. \quad (22)$$

Теорема 1. Если $\alpha > \beta$, то $\frac{dE}{dt} \leq 0$ и поэтому все частные производные $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а само решение выходит на константу (стационарный режим).

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть интеграл (20). Здесь после интегрирования по частям с учетом краевых условий, перепишем (20) в виде:

$$I_1 = - \int (d_1 |\nabla u_1|^2 + d_2 |\nabla u_2|^2) dx.$$

Тогда, учитывая обозначения (22), в силу неравенства Коши — Буняковского имеем:

$$I_2 \leq \beta \int (u_1^2 + u_2^2) dx. \quad (23)$$

Так как $\alpha = \min(d_1, d_2)$, то для первого из интегралов в правой части последнего неравенства справедливо неравенство Фридрихса, а потому справедливы неравенства:

$$\int |\nabla u_i|^2 dx \geq C_F \int u_i^2 dx, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

где C_F — константа Фридрихса.

Используя (23) и (24), получим следующую оценку:

$$\frac{dE}{dt} \leq -\alpha C_F \int (u_1^2 + u_2^2) dx + \beta \int (u_1^2 + u_2^2) dx.$$

Из последнего неравенства заключаем, что если $\alpha > \beta$, то $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

Поскольку $E(t) \geq 0$, то $E(t) \rightarrow E_\infty \geq 0$ и поэтому $\int (u_1^2 + u_2^2) dx \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Применяя аналогичные рассуждения в отношении второго интеграла (21), получим соответственно соотношение $\int |\nabla u_i|^2 dx \rightarrow 0$, а, следовательно, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Поэтому очевидно, что все частные производные $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а само решение выходит на стационар. Теорема доказана.

3. Обобщение на граничные условия первого и третьего рода

В данном разделе мы обобщаем полученные результаты на граничные условия первого рода (условия Дирихле) и третьего рода (условия Робина), исследуя их влияние на динамику и устойчивость системы (1)–(3).

3.1. Граничные условия первого рода (Дирихле)

Граничные условия первого рода задаются как

$$u(x, t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (25)$$

где $g(x)$ — заданная функция на границе $\partial\Omega$. Для простоты предположим, что $g(x) = 0$, что соответствует однородным условиям Дирихле:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (26)$$

Эти условия моделируют ситуацию, когда значения компонент u фиксированы на границе.

Для исследования устойчивости пространственно-однородного положения равновесия \bar{u} , удовлетворяющего $f(\bar{u}) = 0$, рассмотрим спектральную задачу, аналогичную (6), но с граничными условиями Дирихле:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + J\phi = \lambda\phi, \quad x \in \Omega \quad (27)$$

$$\phi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (28)$$

где $J = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u})$ — матрица Якоби. Собственные функции ψ_k краевой задачи

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = -\mu\psi, \quad x \in \Omega, \quad \psi = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (29)$$

образуют биортонормированную систему в $L^2(\Omega)$, а собственные значения μ_k удовлетворяют $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, в отличие от случая Неймана, где $\mu_1 = 0$. Собственные значения системы определяются как

$$\lambda_{k,j} = \gamma_j - \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n, \quad (30)$$

где γ_j — собственные значения матрицы Λ , полученной из J путем преобразования $P^TJP = \Lambda$. Положение равновесия асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}(\lambda_{k,j}) < 0$ для всех k, j . Поскольку $\mu_k > 0$, условия Дирихле могут способствовать большей устойчивости по сравнению с условиями Неймана, так как $-\mu_k$ вносит отрицательный вклад в $\lambda_{k,j}$.

Для анализа поведения решений при $t \rightarrow \infty$ применим энергетический метод, аналогичный разделу 2.2. Энергия системы определяется как в (18). Однако при вычислении производной $\frac{dE}{dt}$ граничные члены исчезают из-за $u = 0$ на $\partial\Omega$, и формула (19) остается справедливой. Неравенство Фридрихса для условий Дирихле дает более сильную оценку:

$$\int |\nabla u_i|^2 dx \geq C'_F \int u_i^2 dx, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

где $C'_F > C_F$ за счет отсутствия нулевого собственного значения. Таким образом, если $\alpha > \beta$, как определено в (22), то $\frac{dE}{dt} \leq 0$, и решение стремится к стационарному режиму, причем условия Дирихле усиливают сходимость к константе.

3.2. Границные условия третьего рода (Робина)

Границные условия третьего рода задаются как

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (32)$$

где $\sigma \geq 0$ — параметр, описывающий баланс между потоком и значением функции на границе. Эти условия моделируют частичную проницаемость границы, где $\sigma = 0$ соответствует условиям Неймана, а $\sigma \rightarrow \infty$ приближается к условиям Дирихле.

В таком случае спектральная задача для устойчивости принимает вид:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + J\phi = \lambda\phi, \quad x \in \Omega \quad (33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu + \sigma} \phi = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (34)$$

Краевая задача для собственных функций становится

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = -\mu\psi, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \sigma\psi = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (35)$$

Собственные значения μ_k удовлетворяют $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, где $\mu_1 = 0$ только при $\sigma = 0$. При $\sigma > 0$ все $\mu_k > 0$, что усиливает отрицательный вклад в $\lambda_{k,j} = \gamma_j - \mu_k$. Устойчивость определяется аналогично: положение равновесия асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}(\lambda_{k,j}) < 0$ для всех k, j . Условия Робина с $\sigma > 0$ способствуют устойчивости, особенно при больших σ , приближая поведение системы к случаю Дирихле.

При вычислении $\frac{dE}{dt}$ для условий Робина граничные члены дают дополнительный вклад:

$$\frac{dE}{dt} = - \int \left(d_1 |\nabla u_1|^2 + d_2 |\nabla u_2|^2 \right) dx - \int \sigma (u_1^2 + u_2^2) dS + \int (u_1 f_1 + u_2 f_2) dx. \quad (36)$$

Интеграл по границе $\int \sigma (u_1^2 + u_2^2) dS \geq 0$ усиливает затухание энергии, так как $\sigma \geq 0$. Используя неравенство Фридрихса, адаптированное для условий Робина, получаем, что если $\alpha > \beta$, то $\frac{dE}{dt} \leq 0$, и решение стремится к стационарному режиму. При $\sigma > 0$ дополнительный граничный член ускоряет сходимость, делая условия Робина промежуточными между Неймана и Дирихле.

4. Замечание

Очевидно, что полученный результат распространяется на случай системы (1)–(3). Однако этот результат не всегда удается использовать в конкретных случаях, так как вычисление постоянной β зависит от априорных знаний о решении системы (15)–(17) (или системы (1)–(3)) и его производных.

5. Вывод

Предложенный метод [3,6] позволяет сохранять устойчивость при достаточно больших коэффициентах диффузии. Такого вида устойчивость принято называть пространственно-диффузионной устойчивостью, даже в случае неустойчивой системы (при $t \rightarrow \infty$).

Границные условия первого и третьего рода существенно влияют на поведение систем «реакция-диффузия» [7, 8]. Условия Дирихле, фиксируя нулевые значения на границе, усиливают

устойчивость и сходимость к стационарному режиму за счет положительных собственных значений μ_k . Условия Робина, в зависимости от параметра σ , обеспечивают гибкий переход между условиями Неймана и Дирихле, причем при $\sigma > 0$ они также способствуют устойчивости. Энергетический метод подтверждает, что при достаточно больших коэффициентах диффузии ($\alpha > \beta$) решения стремятся к пространственно-однородному стационарному состоянию, причем условия Дирихле и Робина с $\sigma > 0$ ускоряют этот процесс по сравнению с условиями Неймана.

Литература

1. Братусь А. А. Математические модели эволюции и динамики репликаторных систем / А. А. Братусь, Т. С. Дрожжин, Т. С. Якушкина. – Москва : URSS, 2022. – 264 с.
2. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1967. – 736 с.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – Москва : Наука, 1970. – 512 с.
4. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – Москва : Физматлит, 2002. – 432 с.
5. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1985. – 376 с.
6. Borisov N. D. Development of Lanchester-Type Spatial Models with Obtaining Localized Solutions for the Interaction of Two Groups / N. D. Borisov // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2025. – Vol. 13. – P. 2332–2342. – DOI: 10.4236/jamp.2025.137132.
7. Borisov N. D. Spatial distributed Lanchester model considering nonlinear dynamics / N. D. Borisov, V. V. Nefedov // International Journal of Open Information Technologies. – 2025. – Vol. 13, No 9. – P. 82–90.
8. Inovenkov I. N. Computer modeling of urban population dynamics / I. N. Inovenkov, V. V. Nefedov, V. V. Tikhomiriv // Modern Information Technologies and IT-Education. – 2022. – Vol. 18, No 2. – P. 300–309.

J-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ δ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИРАКА — КИПРИЯНОВА

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. Для анализа задач, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с отрицательным параметром, в работе приводится интегральное преобразование. Его ядро задаётся одним из линейно независимых решений соответствующего сингулярного уравнения Бесселя. Введено определение δ -распределения Дирака — Киприянова и получена формула J-преобразования Бесселя δ -распределения Дирака — Киприянова.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, преобразование Фурье — Бесселя, δ -функция Дирака.

Введение

Введём следующие обозначения пространств:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}, \quad \mathbb{R}_+^n = \{x : x_i > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x : x_i \geq 0\}, \quad i = \overline{1, n},$$

и операторов:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad 0 < \gamma_i < 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

В начале 80-х годов XX века И. А. Киприянов инициировал исследование задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя с отрицательным параметром. Развитием этого направления занялся его ученик В. В. Катрахов, в основе подхода которого лежало *соотношение Вайнштейна — Дарбу*, связывающее операторы для положительных и отрицательных параметров. Хотя область применения данного соотношения освещена в книге [1], упомянутые исследования по этой теме не были опубликованы, так как возникшие трудности требовали введения принципиально нового математического аппарата по сравнению с известным в то время. Такой специальный аппарат, по всей видимости, и был создан в [2–4].

Приведём некоторые известные понятия теории сингулярных дифференциальных уравнений. Известно [5], что оператор Бесселя ограниченно действует на гладкую чётную функцию:

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} B_{\pm\gamma_i} u(x) = u_{x_i, x_i} \pm \gamma_i \lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{u_{x_i}}{x_i} = (1 \pm \gamma_i) u_{x_i, x_i}(x) \Big|_{x_i=0}. \quad (1)$$

Функцию, определенную в полупространстве $x_i > 0$, будем называть четной в смысле следующего определения (см. [6, с. 21]).

Определение 1. Функцию, заданную на полуоси $Ox_i = [0, +\infty)$ будем называть *четной по аргументу x_i* , если возможно её четное продолжение на всю ось x_i с сохранением класса своей принадлежности.

Класс ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных в n -полупространстве \mathbb{R}_+^n , удовлетворяющих условию четности по каждой координате аргумента, будем обозначать $C_{ev}^\ell(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$.

1. Основы гармонического анализа с оператором $B_{-\gamma}$

Весовая билинейная форма в \mathbb{R}_+^n , отвечающая параметрам $-\gamma_i \in (-1, 0)$, вводится следующим выражением:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x)v(x)x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} dx = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx_i, \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \quad (2)$$

Определение (2) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma} = L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ u : \|u\|_{L_2^{-\gamma}} = \sqrt{(u, u)_{-\gamma}} < \infty \right\}, \quad -\gamma_i > -1.$$

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство пространства Шварца $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$, состоящее из четных основных функций. Следует обратить внимание на требование четности функций, определенных в евклидовом n -полупространстве \mathbb{R}_+^n . Пространство распределений обозначается $S'_{ev,\gamma}$.

1.1. \mathbb{J} -функции Бесселя. Пусть $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$ и $\mu_i = (\gamma_i + 1)/2$. Линейно независимые решения сингулярных дифференциальных уравнений Бесселя

$$B_{-\gamma_i} u + u = 0, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu_i)}{m! \Gamma(m+1+\mu_i)} \frac{x_i^{2(m+\mu_i)}}{2^{2m}} = \Gamma(1+\mu_i) 2^{\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{\mu_i}(x_i), \\ \mathbb{J}_{-\mu_i}(x_i) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu_i)}{m! \Gamma(m+1-\mu_i)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1-\mu_i) 2^{-\mu_i} x_i^{-\mu_i} J_{-\mu_i}(x_i), \end{aligned}$$

где $J_{\pm\mu_i}$ — функции Бесселя первого рода. Можно отметить, что \mathbb{J} -функции Бесселя удовлетворяют условиям

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x) = O(x_i^{2\mu_i}), \quad x_i \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2\mu_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x) = 1; \quad \mathbb{J}_{-\mu_i}(0) = 1.$$

Решения $\mathbb{J}_{-\mu_i}$ востребованы в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что показано в [7]. Для цели этой работы более естественным оказалось использовать только \mathbb{J} -функции Бесселя положительного параметра μ .

1.2. Обобщенный \mathbb{T} -псевдосдвиг и \mathbb{T} -сдвиг. В [8] по аналогии с известной теоремой сложения Б. М. Левитана [2] получено равенство

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_{\mu}(x) = \mathbb{J}_{\mu}(x) \mathbb{J}_{\mu}(y), \quad \mu = \frac{\gamma+1}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Многомерный интегральный оператор \mathbb{T} назван в [3] псевдосдвигом и определен формулой

$$\mathbb{T}_x^y f(x, t) = \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} f\left(x \xrightarrow{\alpha} y, t\right) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i,$$

где «сдвинутый» аргумент $(x \xrightarrow{\alpha} y)$ функции f имеет следующий вид

$$(x \xrightarrow{\alpha} y) = (\dots, x_i \xrightarrow{\alpha} y_i, \dots) = (\dots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, \dots), \quad i = \overline{1, n}.$$

Приведенная конструкция не может быть сдвигом, т. к. не выполнено главное условие: нулевой шаг сдвига не меняет функции.

Основные свойства многомерного \mathbb{T} -псевдосдвига определены следующими равенствами:

$$(u^* v)_{-\gamma} = (\mathbb{T}_x^y u, v)_{-\gamma} = (u, \mathbb{T}_x^y v)_{-\gamma}, \quad B_{-\gamma_i} (u^* v)_{-\gamma} = (B_{-\gamma_i} u^* v)_{-\gamma} = (u^* B_{-\gamma_i} v)_{-\gamma}. \quad (3)$$

Первое равенство в (3) есть определение обобщенной \mathbb{T} -свертки функций, второе — свойство эрмитовости \mathbb{T} -псевдосдвига в весовой линейной форме (2), следующие два равенства есть следствие эрмитовости \mathbb{T} -псевдосдвига и В-дифференцирования \mathbb{T} -свертки. Отметим также коммутируемость \mathbb{T} -псевдосдвига с $\Delta_{B_{-\gamma,x}}$ -оператором:

$$\mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma,x}} u(x) = \Delta_{B_{-\gamma,x}} \mathbb{T}^y u(x);$$

Востребованным в наших исследованиях оказался следующий интегральный оператор

$$\mathbb{T}_x^y f(x,t) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f\left(x \xrightarrow{\alpha} y, t\right) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{x_i^{\gamma_i+1}}{(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i.$$

Нетрудно проверить, что нулевой шаг сдвига не меняет функцию

$$\mathbb{T}_x^0 f(x,t) = f(x,t). \quad (4)$$

Поэтому эта конструкция уже не противоречит природе того, что имело право называться «сдвигом». Более того, в работе [10] доказано, что данная конструкция сдвига удовлетворяет определению класса обобщенных сдвигов.

1.3. Преобразования Бесселя, порожденные \mathbb{J}_μ решениями дифференциального уравнения Бесселя. Пусть $x, \xi \in \mathbb{R}_+^n$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Четным прямым и четным обратным \mathbb{J} -преобразованиями Бесселя будем называть следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[f](x) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx, \\ \mathbb{F}^{-1}[\hat{f}](\xi) &= C(\mu) \int_{\mathbb{R}_+^n} \hat{f}(\xi) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i) \xi_i^{-\gamma_i} d\xi_i, \quad C(\mu) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^{\mu_i} \Gamma(\mu_i + 1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Для $f(x) \in L_2^{-\gamma}$, $0 < \gamma_i < 1$ эти преобразования обратимы (доказательство см. [9]):

$$\mathbb{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x).$$

2. $\delta_{-\gamma}$ -распределение Дирака–Киприянова

Хорошо известно, что сингулярный функционал, называемый δ -функцией Дирака, примененный к радиальной функции $\varphi = \varphi(|x|)$, принимает форму весового сингулярного распределения (2) с целочисленным параметром $\gamma = n - 1$:

$$(\delta, \varphi) = (\delta_{B_\gamma}, \varphi(r))_\gamma = |S_1(n)| \varphi(0), \quad r = |x|, \gamma = n - 1,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь единичной сферы с центром в начале координат в евклидовом пространстве точек \mathbb{R}_n .

И. А. Киприянов ввел понятие *весовой δ -функции* [6, с. 12] равенством $(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0)$ в пространстве распределений $S'_{ev,\gamma}$, регулярные представители которых определены функционалом $(\cdot, \varphi)_\gamma$ на основе весовой билинейной формы (2) с $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_i > 0$ и уже не обязательно целое число, а площадь нагруженной весами сферы вычисляется по формуле

$$\int_{S_1(n)} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\gamma_i} dS, \quad |S_1(n)|_\gamma = 2 \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \quad (5)$$

При выполнении условия $\gamma_i > -1$ формула (5) применена для определения $\delta_{-\gamma}$ -распределения с носителем в произвольной точке евклидова n -полупространства \mathbb{R}_+^n . Необходимо воспользоваться \mathbb{T} -псевдосдвигом. Присутствие в билинейной форме \mathbb{T} -псевдосдвига сразу меняет вес этой формы, который становится равным первой степени переменной аргумента функций.

Дадим точное определение обобщенной $\delta_{-\gamma}$ -функции Дирака. Сначала отметим, что классический подход опирается на существование соответствующей $\delta_{-\gamma, \varepsilon}$ — δ -образной последовательности, такой, что

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_n^+} \delta_{-\gamma, \varepsilon}(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \varphi(0), \quad -1 < \gamma_i < 0. \quad (6)$$

Такая последовательность существует, её примером может служить $\left\{ \mathbb{T}_x^y \omega_\varepsilon(x) \right\}$, где

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad n \geq 1,$$

и константа C_ε выбрана так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}_n} \omega_\varepsilon(x) x dx = 1. \quad (7)$$

Действительно. В этом случае, продолжая равенство (6), имеем

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{x \in \mathbb{R}_n^+, |x| < \varepsilon\}} \omega_\varepsilon(x) \mathbb{T}_y^x \varphi(y) x^{-\gamma} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \omega_\varepsilon(x) \mathbb{T}_y^x \varphi(y) x dx.$$

Но здесь уже вместо псевдосдвига \mathbb{T}_y^x проявился \mathbb{T}_y^x -сдвиг, принадлежащий классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана. Теперь применим первую теорему о среднем и учитывая (4) и (7), получим

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \lim_{0 < x_0 < \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}_y^{x_0} \varphi(x) \int_0^\infty \omega_{-\gamma, \varepsilon}(x) \varphi(x) x dx = \varphi(y).$$

Определение 2. Пусть $xdx = \prod_{i=1}^n x_i dx_i$. Сингулярное распределение, сосредоточенное в точ-

ке $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ и определенное равенствами

$$(\delta_{-\gamma}, \mathbb{T} \varphi)_{-\gamma} = \left(\delta_{-\gamma}, \mathbb{T}_y^{x_0} \varphi(y) \right)_1 = \varphi(y), \quad \forall \varphi(x) = \varphi(|x|) \in C_{ev}[0, \varepsilon],$$

будем называть $\delta_{-\gamma}$ -распределением Дирака в $S'_{ev, -\gamma}$.

Теорема 1. [\mathbb{J} -Преобразования Бесселя $\delta_{-\gamma}$ -распределения Дирака.] Пусть $\mu = (\gamma + 1)/2$, $0 < \gamma < 1$. В смысле распределений $S'_{ev, -\gamma}$ имеет место равенство

$$\mathbb{F} \left[\mathbb{T}_x^{x_0} \delta_{-\gamma} \right] (\xi) = \mathbb{J}_\mu (x_0 \xi).$$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. Катрахов В. В. Сингулярные эллиптические краевые задачи / В. В. Катрахов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. – 509 с.
2. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова — Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.
3. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

4. Булатов Ю. Н. В-эллиптические уравнения с оператором Лапласа — Бесселя — Киприянова : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.1.2 / Булатов Юрий Николаевич; науч. рук. Л. Н. Ляхов ; ВГУ. – Воронеж, 2025. – 118 с.
5. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.
6. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. – 204 с.
7. Сабитов К. Б. Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 123–135.
8. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_v -оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С.А. Рошупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 12. – С. 1654–1665.
9. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рошупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 7. – С. 52–65.

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ СРЕДЫ

И. В. Гусельникова

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Рассматривается достаточно часто встречающаяся в промышленной сфере сплошная среда, состоящая из совокупности слоев — слоистой односторонне деформированной композиционной среды (композитов), и физические процессы в слоях — процессы переноса, волновые процессы и изменение напряженно-деформированного состояния этой среды. Представлена математическая модель упругих деформаций элементов композиционной среды (краевая задача) в соболевском пространстве функций с носителем в слоистой области, формируется ей соответствующий дискретный аналог и устойчивая разностная схема, описывающая закономерности изменения приближений к точному решению краевой задачи, устанавливаются достаточные условия слабой разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: слоистая область, деформация элементов композиционных материалов, сходящаяся разностная схема, слабая разрешимость краевой задачи.

Введение

Под сетеподобными процессами понимается любое эволюционное изменение физической среды: перенос тепла, волновые явления, гидродинамические изменения, имеющие носитель со сложной реологией структуры, т.е. в виде сетей, сетеподобных конструкций и иных физических континуумов: теплопроводы, гидросистемы, антенные конструкции и пр. Методы математического моделирования наиболее типичных естественно-научных сетеподобных процессов, а именно тепловых и волновых процессов (распространение теплоты в сетеподобных промышленных конструкциях, колебания в сетях), биологических процессов (метаболизм живого организма: граф кровеносной системы), экономических и диффузионных процессов в коммерческих сетях (порча товара, естественная утечка, реализация вне торгового прилавка) были описаны ранее. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных материалов (композитов), представляющих собой набор слоев из односторонне деформированных композитов. Каждый слой может содержать длинные волокна (армирующие элементы), расположенные параллельно друг другу, и является односторонне деформированным волокнистым композитом. При решении задач, связанных с анализом и описанием состояний композитов, обычно используют количественные характеристики слоев, которые не являются функциями координат точек среды с тем, чтобы не решать соответствующие задачи для неоднородной среды. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния упругой слоистой среды, слои которой характеризуются различными свойствами. Ставится и исследуется краевая задача о равновесии изотропного упругого слоистого тела при условии жесткого закрепления, т.е. задача об определении вектора упругих смещений, как решение системы дифференциальных уравнений теории упругости с соответствующими краевыми условиями. Для такой системы формируется соболевское пространство (пространство допустимых решений), элементы которого в местах примыкания слоев удовлетворяют условиям, выражающие непрерывность среды и равновесие сил, действующих на нее. В рамках метода конечных разностей краевой задаче сопоставляется ее дискретный аналог (разностная схема), устанавливаются достаточные условия, гарантирующие однозначную разрешимость и устойчивость этой схемы, что лежит в основе доказательства слабой разре-

шимости краевой задачи. Рассуждения, представленные в работе, достаточно легко обобщаются на случай анизотропных сред.

1. Основные понятия и определения

Пусть область $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}^3$ содержит подобласти \mathfrak{I}_j , $j = 1, 2, \dots, N$, которые, образуя слоеную структуру, взаимно попарно примыкают друг к другу, а значит, область \mathfrak{I} не содержит мест ветвлений. Очевидно, такая область есть частный случай сетеподобных областей, поэтому используются понятия и терминология работ [1, 2]. Слоистая область \mathfrak{I} ($\partial\mathfrak{I}$ — граница \mathfrak{I}), являясь частным случаем сетеподобной области, состоит из двух совокупностей: совокупность подобластей \mathfrak{I}_j , $j = 1, 2, \dots, N$ (\mathfrak{I}_j — слои области, $\partial\mathfrak{I}_j$ — границы слоев) и совокупность поверхностей S_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ (в литературе S_j — двухсторонние поверхности примыкания слоев, S_j^+ , S_j^- — стороны S_j). Поверхности S_j являются общими границами примыкающих слоев \mathfrak{I}_j .

Рассматривается задача определения векторной функции $u = (u_1, u_2, u_3)$, описывающей малые упругие деформации при условии жесткого закрепления. При этом предполагается выполнение гипотезы Кирхгофа: элементы поверхностей взаимного примыкания S_j слоев \mathfrak{I}_j не подвержены растяжению или сжатию при деформации [1]. В изотропном случае эта задача описывается системой дифференциальных уравнений

$$\sum_{\kappa=1}^3 \frac{\partial \tau_{\iota\kappa}^j(u)}{\partial x_\kappa} = -f_\iota(x), \quad \iota = 1, 2, 3, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u|_{\partial\mathfrak{I}} = 0, \quad (2)$$

рассматриваемой в каждом слое \mathfrak{I}_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Здесь

$$\tau_{\iota\kappa}^j(u) = 2\mu^j \varepsilon_{\iota\kappa}(u) + \delta_\iota^\kappa \lambda^j \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}(u), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad \varepsilon_{\iota\kappa}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\iota}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial u_\kappa}{\partial x_\iota} \right), \quad (3)$$

δ_ι^κ — символ Кронекера, $\lambda^j > 0$, $\mu^j > 0$ — фиксированы для \mathfrak{I}_j , $j = 1, 2, \dots, N$, система (1) описывает закономерность упругих смещений изотропного тела, (2) — условие жесткого закрепления, $f = (f_1, f_2, f_3)$ — внешние воздействия на систему. Дифференциальная система уравнений теории упругости (1), (2) рассматривается в слабой постановке для чего ниже формулируется пространство $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$ вектор-функций $u = (u_1, u_2, u_3)$, которые подчинены соотношениям на поверхностях S_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, описывающие условия равновесия сил на S_j — условия примыкания подобластей \mathfrak{I}_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$. Отметим при этом, что в силу (3) для любых векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \neq 0$ и фиксированного j имеет место равенство

$$\frac{\mu^j}{2} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 (\xi_\kappa \zeta_\iota + \xi_\iota \zeta_\kappa)^2 + \lambda^j \left(\sum_{l=1}^3 \xi_l \zeta_l \right)^2 = \mu^j \xi^2 \zeta^2 + (\mu^j + \lambda^j) \left(\sum_{l=1}^3 \xi_l \zeta_l \right)^2,$$

называемое в литературе (см., например, [3]) условием сильной эллиптичности системы (1). Тогда интегральное тождество, соответствующее задачи (1), (2), удобно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{\iota\kappa}^j(u) \varepsilon_{\iota\kappa}(\eta) dx = \int_{\mathfrak{I}} f \eta dx, \quad \iota, \kappa = 1, 2, 3.$$

Оно должно выполняться при любой функции $\eta \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$ (пространство $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$ определено ниже); слабое решение $u(x)$ интегрального тождества, а значит, задачи (1), (2) будет также из $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$. Выражение $\sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{\iota\kappa}^j(u) \varepsilon_{\iota\kappa}(\eta) dx$ определяет дифференциальную форму вида

$$\theta(u, \eta) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(\eta) dx$$

для системы (1) на \mathfrak{I}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) относительно $u = (u_1, u_2, u_3) \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$.

Так как $\lambda^j > 0$, $\mu^j > 0$, $j = 1, 2, \dots, N$, из (3) вытекает, что выражение $\tau_{ik}(u) \varepsilon_{ik}(u)$ неотрицательно:

$$\tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(u) dx = 2\mu^j \sum_{i,k=1}^3 (\varepsilon_{ik}(u))^2 + \lambda^j \left(\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}(u) \right)^2.$$

В силу этого оценим интегралы $\int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(u) dx$, $j = 1, 2, \dots, N$:

$$\int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(u) dx = 2\mu^j \int_{\mathfrak{I}_j} \sum_{i,k=1}^3 (\varepsilon_{ik}(u))^2 dx + \lambda^j \int_{\mathfrak{I}_j} \left(\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}(u) \right)^2 dx \geq \lambda^j \int_{\mathfrak{I}_j} \left(\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}(u) \right)^2 dx = \frac{\lambda^j}{2} \|u_x\|_{\mathfrak{I}_j}^2.$$

В результате получим оценку

$$\theta(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|u\|_{(W_2^1(\mathfrak{I}))^3}^2, \quad \lambda = \sum_{j=1}^N \lambda^j.$$

Отсюда, учитывая утверждение леммы Лакса — Мильграма, что существует единственная функция $u \in (W_2^1(\mathfrak{I}))^3$ ($(W_2^1(\mathfrak{I}))^3$ — соболевское пространство суммируемых с квадратом функций, имеющих обобщенную производную в области \mathfrak{I} , для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(\eta) dx = \int_{\mathfrak{I}} f \eta dx \quad \forall \eta \in (W_2^1(\mathfrak{I}))^3. \quad (4)$$

Для описания условия взаимного примыкания слоев при деформации (изгибе) на поверхностях S_j смежных слоев \mathfrak{I}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) используются формулы Грина по $\varepsilon_{ik}(\eta)$ для каждого интеграла $\int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(\eta) dx$ на слое \mathfrak{I}_j выражения $\sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{I}_j} \tau_{ik}^j(u) \varepsilon_{ik}(\eta) dx$, а также соотношение (4), учитывая условия (2). Получаем соотношения

$$\int_{S_j^+} \frac{\partial u}{\partial \nu_+} \eta dx + \int_{S_j^-} \frac{\partial u}{\partial \nu_-} \eta dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

на сторонах S_j^+ , S_j^- поверхностей примыкания S_j слоев \mathfrak{I}_j , из которых при добавлении естественных условий неразрывности среды вытекают условия взаимного примыкания слоев \mathfrak{I}_j

$$u_{S_j^+} = u_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u}{\partial \nu_+} \eta dx + \int_{S_j^-} \frac{\partial u}{\partial \nu_-} \eta dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

в слабой постановке при любой функции $\eta(x) = \{\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)\} \in (W_2^1(\mathfrak{I}))^3$, где $\frac{\partial u}{\partial \nu_{\pm}} = \sum_{\kappa, i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n_j, x_{\kappa})$ — производные на односторонних поверхностях S_j^+ или S_j^- , $\cos(n_j, x_{\kappa})$ — κ -й направляющий косинус внешней нормали n_j к стороне S_j^+ или S_j^- поверхности S_j , соответствующей примыкающим смежным слоям \mathfrak{I}_j , \mathfrak{I}_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Полученные условия взаимного примыкания слоев вместе с краевыми условиями (2) определяют сужение пространства $(W_2^1(\mathfrak{I}))^3$ до пространства слабых решений системы (1), (2) (выше обозначено через $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$) следующим образом.

Обозначим через $\mathcal{X}_0(\mathfrak{I}) := \{u : u(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\} \in (\tilde{C}^1(\bar{\mathfrak{I}}))^3\}$. (здесь $(\tilde{C}^1(\bar{\mathfrak{I}}))^3$ — совокупность дифференцируемых на $\bar{\mathfrak{I}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) вектор-функций $u(x)$, удовлетворяющих соотношениям (2) и (5), дифференцируемость на границах $\partial\mathfrak{I}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, понимается как односторонняя).

Определение 1. Пространство $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{J}))^3$ — замыкание $\mathcal{X}_0(\mathfrak{J})$ в метрике $(W_2^1(\Omega))^3$.

Следует отметить, что $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{J}))^3$ со скалярным произведением и нормой пространства $(W_2^1(\mathfrak{J}))^3$ является гильбертовым пространством и задача (1), (2) отыскания вектора $u = (u_1, u_2, u_3)$ упругих перемещений рассматривается в пространстве $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{J}))^3$.

Определение 2. Слабым решением задачи (1), (2) является векторная функция $u(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{J}_j} \tau_{\iota\kappa}^j(u) \varepsilon_{\iota\kappa}(\eta) dx = \int_{\mathfrak{J}} f \eta dx$$

для любой функции $\eta(x) = \{\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)\} \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{J}))^3$.

2. Метод конечных разностей

Используя метод конечных разностей [3, с. 268] (см. также [4]), для задачи (1), (2) формируется разностная схема в терминах сеточных вектор-функций на сетке \mathfrak{J}_h (подробные рассуждения при построении сетки представлены в [4]). Для сеточных функций u_h , η_h строится дискретный аналог условий (5): вводятся кусочно-постоянные интерполяции \hat{u}_h , $\hat{\eta}_h$ на сетках поверхностей S_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$ ($S_j(kh)$ — множество элементарных ячеек $s_j(kh) \subset S_j$) и интегральные тождества (5) принимают вид суммарного тождества:

$$\sum_{s_j^-(kh)} \hat{u}_{h,\nu} \hat{\eta}_h + \sum_{s_j^+(kh)} \hat{u}_{h,\nu} \hat{\eta}_h = 0 \quad \forall \hat{\eta}_h \in S_j(kh), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

здесь $\hat{u}_{h,\nu} = \sum_{i=1}^3 u_{x_i}(x) \langle n, x \rangle$ на $S_j^-(kh)$ или $S_j^+(kh)$, где $u_{x_i}(x) = \frac{1}{h_i} [u(x) - u(x - h_i e_i)]$ или $u_{\bar{x}_i}(x) = \frac{1}{h_i} [u(x + h_i e_i) - u(x)]$ (e_i — направленный по оси x_i единичный вектор), а $\langle n, x \rangle$ — κ -й направляющий косинус внешней нормали $n(x)$ в произвольной вершине ячейки $s_j(kh) \subset S_j$ (соотношения $u_{s_j^+} = u_{s_j^-}$ следуют из свойств \hat{u}_h , $\hat{\eta}_h$).

Дискретный аналог дифференциальной системы (1), (2) определяется системой алгебраических уравнений

$$\sum_{\kappa=1}^3 \left(\tau_{\iota\kappa h}^j(u_h) \right)_{\bar{x}_\kappa} = -f_{\iota h}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

в точках \mathfrak{J}_h на множестве сеточных функций u_h , удовлетворяющих (6) и равных нулю в граничных вершинах сетки \mathfrak{J}_h . В системе (7) $\tau_{\iota\kappa h}^j(u_h)$ связаны с $\varepsilon_{\iota\kappa h}(u_h) = \frac{1}{2} (u_{\iota x_\kappa} + u_{\kappa x_\iota})$ в силу соотношений (3), а $f_{\iota h} = \frac{1}{\Delta_h} \int_{\omega_{(kh)}} f(x) dx$ (здесь $\Delta_h = h_1 h_2 h_3$, h_i — шаги разбиений сетки \mathfrak{J}_h , $\omega_{(kh)}$ — элементарные ячейки сетки \mathfrak{J}_h), причем в граничных точках $\partial\mathfrak{J}_h$ сетки \mathfrak{J}_h выполнены граничные условия

$$u_h|_{\partial\mathfrak{J}_h} = 0. \quad (8)$$

для сеточной функции u_h . Система (7) определяет разностную схему с условиями (8) для краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. Система (7), (8) однозначно разрешима, разностная схема (7) устойчива.

Доказательство. Пусть сеточные функции $u_{\iota h}$ равны нулю вне сетки \mathfrak{J}_h . Умножим (7) на $u_{\iota h}$, просуммируем полученные равенства по ι от 1 до 3 и точкам \mathfrak{J}_h :

$$\Delta_h \sum_{\bar{x}_\kappa} \left(\tau_{\iota\kappa h}^j(u_h) \right)_{\bar{x}_\kappa} u_{\iota h} = -\Delta_h \sum_{\bar{x}_\kappa} f_{\iota h} u_{\iota h}.$$

Используя формулу суммирования по частям $\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} u_{x_i} v_h = -\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} u_h v_{x_i}$ (дискретный аналог формулы интегрирования по частям [3, с. 282]), приходим к равенству

$$\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \tau_{\iota \kappa h}^j(u_h) u_{\iota x_\kappa} = \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} f_{\iota h} u_{\iota h}. \quad (9)$$

Перегруппировка слагаемых выражения, учитывая соотношения $\varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) = \frac{1}{2}(u_{\iota x_\kappa} + u_{\kappa x_\iota})$, $\iota, \kappa = 1, 2, 3$, приводит (9) к виду

$$\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \tau_{\iota \kappa h}^j(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) = \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} f_{\iota h} u_{\iota h}. \quad (10)$$

Так как $\mu^j > 0$ и $\lambda^j > 0$, выражение $\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \tau_{\iota \kappa h}^j(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h)$ в (10) неотрицательное. Покажем, что $\tau_{\iota \kappa h}^j(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h)$, где

$$\tau_{\iota \kappa h}^j(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) = 2\mu^j \sum_{\iota, \kappa=1}^3 (\varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h))^2 + \lambda^j \sum_{\kappa=1}^3 (\varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h))^2, \quad (11)$$

эквивалентно $(\|u_h\|_{\mathfrak{I}_h}^1)^2 = \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 (u_{\iota x_\kappa})^2$ (сеточной норме u_h). Действительно, используя формулу суммирования по частям $\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} u_{x_i} v_h = -\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} u_h v_{x_i}$, получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) &= \frac{1}{4} \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 ((u_{\iota x_\kappa})^2 + 2u_{\iota x_\kappa} u_{\kappa x_\iota} + (u_{\kappa x_\iota})^2) = \\ &= \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 ((u_{\iota x_\kappa})^2 - u_{\iota \bar{x}_\kappa} u_{\kappa x_\iota}) = \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 ((u_{\iota x_\kappa})^2 + u_{\iota \bar{x}_\iota} u_{\kappa \bar{x}_\kappa}), \end{aligned}$$

которые приводят к оценке

$$\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) \varepsilon_{\iota \kappa h}(u_h) \geq \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} \sum_{\iota, \kappa=1}^3 (u_{\iota x_\kappa})^2 \equiv \frac{1}{2} \|u_h\|_{\mathfrak{I}_h}^2. \quad (12)$$

Если положить в (2) $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = 0$, то, учитывая соотношения (10) и (12), приходим к утверждению: линейная система алгебраических уравнений (7), (8) имеет единственное решение $u(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\} = 0$ и она однозначно разрешима для любых $f_{\iota h}$. При этом из (10)–(12) следует неравенство

$$\Delta_h \sum_{\mathfrak{I}_h} |u_h|^2 + \|u_h\|_{\mathfrak{I}_h}^2 \leq C \|f\|_{\mathfrak{I}_h}^2 \leq C \quad (13)$$

с независящей от шагов разбиений сетки \mathfrak{I}_h постоянной C . Последнее неравенство означает устойчивость разностной схемы (7) с условием (8).

3. Основной результат

Неравенство (13) гарантирует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $\{u_h\}$ множество сеточных функций u_h , определенных на сетке \mathfrak{I}_h при $h = (h_1, h_2, h_3) \rightarrow 0$ и удовлетворяющих оценке (13). Тогда слабый предел последовательности кусочно-постоянных интерполяций $\{\hat{u}_h\}$, $h \rightarrow 0$, будет слабым решением задачи (1), (2) в энергетическом пространстве $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{I}))^3$.

Следует отметить, что с математической точки зрения приведенные рассуждения и полученные результаты можно обобщить на решение краевых задач дифракции, т. е. на задачи для уравнений, коэффициенты которых терпят разрывы первого рода. На поверхностях (аналоги поверхностей S_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$), где рвутся коэффициенты, ставятся условия сопряжения

(трансверсальности), выражающие непрерывность среды и равновесие сил, действующих на нее (аналоги условий (5)). Разрывность коэффициентов уравнения соответствуют тому, что среда, как и композит, составлена из двух или нескольких разнородных по своим физическим характеристикам материалов. Анализ таких ситуаций аналогичен приведенному в настоящей работе. Также следует отметить, что используемый метод применим в анализе гидродинамических процессов — в случае ламинарных течений.

Заключение

Для анализа задач теории упругих деформаций указаны принципы построения сходящихся разностных схем, а также путь построения приближений к точному решению исходной задачи, соответствующий методу конечных разностей. При этом исследование ведется в классе суммируемых функций с обобщенной производной — строится специальное соболевское пространство допустимых решений с энергетической нормой. Представлено описание слоистой области и свойства функций с носителем в слоистой области для анализа указанных задач. Дифференциальная система заменяется разностной схемой, для которой осуществлен достаточно глубокий анализ устойчивости и сходимости. Следует отметить, что с математической точки зрения приведенные рассуждения и полученные результаты можно обобщить на решение краевых задач дифракции, т. е. на задачи для дифференциальных уравнений, коэффициенты которых терпят разрывы первого рода, а также на задачи сетевой гидродинамики для линеаризованной системы Навье — Стокса.

Литература

1. Провоторов В. В., Сергеев С. М. Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. – 2024. – Т. 29, Вып. 146. – С. 188–203.
2. Zhabko A. P., Karelina V. V., Provotorov V. V., Sergeev S. M. Optimal control of thermal and wave processes in composite materials // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2023. – Т. 19, Вып. 3. – С. 403–418. <http://hdl.handle.net/11701/44293> <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.203>
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М. : Наука, 1973. – 407 с.
4. Жабко А. П., Провоторов В. В., Игонина Е. В., Сергеев С. М. Оптимальное управление напряженно-деформированными состояниями композиционной слоистой среды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2024. – Т. 20, № 4. – С. 534–549. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.408>

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ SK-ROCK МЕТОДОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

А. С. Еремин, Ц. Син

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В работе предпринята попытка изучить среднеквадратическую устойчивость численного решения стохастического дифференциального уравнения, детерминистическая часть которого содержит член с запаздывающим аргументом. Анализируется расширение на этот случай метода SK-ROCK из группы методов Рунге — Кутты — Чебышёва, демонстрирующего превосходную устойчивость для стохастических дифференциальных уравнений. Подход для оценки среднеквадратической устойчивости объединяется с анализом P -устойчивости методов для обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями. Для числа этапов 2 и 3 построены области устойчивости для действительных значений коэффициентов тестового уравнения и проведены численные эксперименты, результаты которых согласуются с ожиданием на основе анализа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, стохастические дифференциальные уравнения, методы Рунге — Кутты — Чебышёва, S-ROCK, SK-ROCK.

Введение

Методами Рунге — Кутты — Чебышёва (РКЧ) называют такие явные методы Рунге — Кутты, функции устойчивости которых выражаются через полиномы Чебышёва (см., напр., [1]). Они обладают хорошей асимптотической устойчивостью решения с постоянным шагом применительно к тестовому уравнению

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

для значений λ , с малыми мнимыми частями, что делает их подходящими быстрыми методами для параболических задач матфизики. Следует отметить, что эти методы обычно используются с неким коэффициентом демпфирования, чтобы избежать сужения области устойчивости до нуля в некоторых точках вдоль действительной оси на комплексной плоскости λ . Увеличение коэффициента демпфирования приводит к сокращению длины области устойчивости вдоль действительной оси, но для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) обычно достаточно выбрать довольно маленькое значение коэффициента демпфирования, что в малой степени влияет на длину области устойчивости.

В [2, 3] приводится анализ устойчивости методов РКЧ для уравнений с постоянным запаздыванием

$$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau)$$

и для действительных значений λ и μ строится область так называемой P -устойчивости. При этом показано, что устойчивость для уравнений с запаздыванием очень сильно зависит от способа интерполяции решения, причём лучшие результаты получены для линейной интерполяции как для методов первого, так и второго порядка. Отметим, что результаты [2] показали, что для построения «оптимальных» (наиболее широких как по λ , так и по μ) областей устойчивости требуется более значительное демпфирование, чем принятое при решении ОДУ.

В работах [4–6] рассмотрены методы S-ROCK для стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$dy(t) = f(y(t))dt + g(y(t))dW(t)$$

и представлен анализ их среднеквадратической устойчивости для линейных СДУ. «Оптимальные» значение демпфирования приведены в [7] (там рассматривается СДУ с запаздыванием в

стохастическом члене, но поскольку результат получен для всех возможных величин запаздывания, он сводим к случаю простого СДУ). Оказывается, для S-ROCK требуется очень большое демпфирование, что существенно ограничивает длину области устойчивости.

Значительное улучшение с этой точки зрения представляют SK-ROCK методы [8], которые расширяют ROCK на СДУ по-другому. Эти методы обладают превосходной устойчивостью относительно величины стохастического члена и для покрытия максимально возможной области точной устойчивости решения линейного СДУ им требуется довольно маленькое демпфирование.

Анализ среднеквадратической устойчивости для уравнений с запаздыванием в стохастической части рассматривался для различных методов, см. напр. [9, 10]. Однако для уравнений с запаздыванием в детерминистической части такие исследования не проводились, по крайней мере, для ROCK-методов. Впервые применение S-ROCK к таким уравнениям рассмотрено в [11], где получены области устойчивости методов с малым числом этапов, совмещающие анализ среднеквадратической устойчивости стохастического решения и Р-устойчивость решений ОДУ с запаздываниями. Как оказалось, необходимое демпфирование методов S-ROCK накладывает существенные ограничения на размер области устойчивости. В настоящей работе мы рассмотрим применение методов SK-ROCK к таким же уравнениям с запаздыванием.

1. SK-ROCK методы для уравнений с запаздыванием в детерминистической части

Рассмотрим стохастическое уравнение Ито с запаздыванием

$$\begin{cases} dy(t) = f(y(t), y(t-\tau))dt + g(y(t))dW(t), & t \in [0, T], \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

с постоянным запаздыванием $\tau > 0$, где $W(t)$ — скалярный винеровский процесс. Начальная функция $\varphi(t)$ является непрерывной на $[-\tau, 0]$ и удовлетворяет условию $\mathbf{E} \left[\sup_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)|^2 \right] < +\infty$. Мы предполагаем, что функции f и g являются липшицевыми и удовлетворяют условию линейного роста, тем самым обеспечивая существование и единственность решения на произвольном промежутке времени.

Метод SK-ROCK [8] с s этапами с линейной интерполяцией решения для (1) на n -м шаге из точки (t_{n-1}, y_{n-1}) в точку (t_n, y_n) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1^n &= y_{n-1}, \\ K_2^n &= y_{n-1} + h \frac{w_1}{w_0} f \left(K_1^n + \frac{sw_1}{2} g(K_1^n) \Delta W_n, \eta(t_{n-1} - \tau) \right) + \frac{sw_1}{w_0} g(K_1^n) \Delta W_n, \\ K_{i+1}^n &= 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} \left(h w_1 f(K_i^n, \eta(t_{n-1} + c_i h - \tau)) + w_0 K_i^n \right) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} K_{i-1}^n, \quad i = 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$y_n = K_{s+1}^n,$$

где интерполянт $\eta(t)$ определяется как

$$\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leq t_0, \\ y_{k-1}(1-\theta) + y_k \theta, & \theta = \frac{t-t_{k-1}}{h}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2b)$$

а абсциссы метода Рунге — Кутты $0 \leq c_i \leq 1$ вычисляются как

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{w_1}{w_0}, \quad c_i = 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} (w_1 + w_0 c_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} c_{i-1}, \quad i = 2, \dots, s, \quad c_{s+1} = 1.$$

В выражениях выше

$$w_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{s^2}, \quad w_1 = \frac{T_s(w_0)}{T'_s(w_0)},$$

где $\varepsilon \geq 0$ — коэффициент демпфирования.

2. Среднеквадратическая Р-устойчивость

Исследование устойчивости метода (2) должно объединять анализ среднеквадратической устойчивости методов решения СДУ и устойчивости методов решения дифференциальных уравнений с запаздываниями, которая в простом случае рассматривается на примере линейных уравнений с постоянными коэффициентами (аналог тестового уравнения Далквиста для ОДУ [1]) и называется *P*-устойчивостью [12]. Рассмотрим тестовое уравнение с запаздыванием и стохастическим членом

$$dy(t) = (\lambda y(t) + \mu y(t-\tau)) dt + \sigma y(t) dW(t). \quad (3)$$

Отметим, что в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением лишь действительных значений коэффициентов λ , μ и σ .

Применяя SK-ROCK к (3) и используя упрощение, возможное вследствие линейной интерполяции (26) (см. [11]), получим разностное уравнение

$$y_n = R(\alpha)y_{n-1} + \beta b^T (E - \alpha A)^{-1} ((u - c)y_{n-m-1} + cy_{n-m}) + Q(\alpha)y_{n-1}\sigma\Delta W_n, \quad (4)$$

где $\alpha = \lambda h$, $\beta = \mu h$, A , b и c — матрица и векторы коэффициентов рассматриваемого метода Рунге — Кутты (получаемые путём записи метода (1) как явного метода РК в классической форме), E — единичная $(s \times s)$ -матрица, u — вектор из s единиц,

$$R(\alpha) = \frac{T_s(w_0 + \alpha w_1)}{T_s(w_0)} -$$

функция устойчивости метода РКЧ для ОДУ, а

$$Q(\alpha) = \frac{U_{s-1}(w_0 + \alpha w_1)}{U_s(w_0)} \left(1 + \alpha \frac{w_1}{2} \right) -$$

функция, участвующая в анализе устойчивости SK-ROCK методов [8]. T_i и U_i — полиномы Чебышёва первого и второго рода соответственно.

Математическое ожидание квадрата модуля от обеих частей (4) даёт

$$\mathbf{E} \left[|y_n|^2 \right] = \mathbf{E} \left[\left| R(\alpha)y_{n-1} + \beta b^T (E - \alpha A)^{-1} ((u - c)y_{n-m-1} + cy_{n-m}) \right|^2 \right] + \kappa Q^2(\alpha) \mathbf{E} \left[|y_{n-1}|^2 \right], \quad (5)$$

где $\kappa = h\sigma^2$. Это выражение довольно трудоёмко для анализа, поэтому мы для анализа устойчивости используем другой подход.

При выводе *P*-устойчивости для уравнений без стохастического члена ($\kappa = 0$) разностное выражение в правой части заменяется на $P(\alpha, z)y_{n-1}$, где $P(\alpha, z)$ — функция *P*-устойчивости метода РКЧ, выражаемая при линейной интерполяции [11] как

$$P(\alpha, z) = 1 + (\alpha + z) \frac{b^T (E - \alpha A)^{-1} u}{1 - z b^T (E - \alpha A)^{-1} c},$$

а z — вспомогательная комплексная переменная, участвующая в определении границ устойчивости по β при фиксированном α [12].

С некоторой осторожностью в (4) можно сделать аналогичную замену и получить оценку снизу области среднеквадратической *P*-устойчивости

$$S_{MSP} \supseteq \{(\alpha, \beta, \kappa) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) : \alpha \in S_A, |\beta| \leq \gamma_{\alpha, \kappa}\}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_{\alpha, \kappa} = \inf_{z \in \Gamma_{\alpha, \kappa}} |z|, \quad \Gamma_{\alpha, \kappa} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |P^2(\alpha, z) + \kappa Q^2(\alpha)| = 1 \right\}.$$

Заметим, что даже при рассмотрении только действительных значений λ , μ и σ требуется исследовать область при всех комплексных значениях z , аналогично тому, как это требуется для P -устойчивости при $\sigma = 0$ [12].

В трёхмерном пространстве (α, β, κ) область устойчивости точного решения уравнения (3) описывается выражением $2\alpha + 2|\beta| + \kappa < 0$ [13]. На рис. 1 и 2 граница этой области показана черной плоской решёткой. Красные поверхности отображают среднеквадратическую устойчивость метода в отсутствие запаздывания, а жёлтые — ограничения $\gamma_{\alpha, \kappa}$ на β , полученные для каждой пары (α, κ) .

«Оптимальный» коэффициент демпфирования обусловлен P -устойчивостью рассматриваемых методов. К сожалению, даже не столь большое демпфирование, как в случае методов

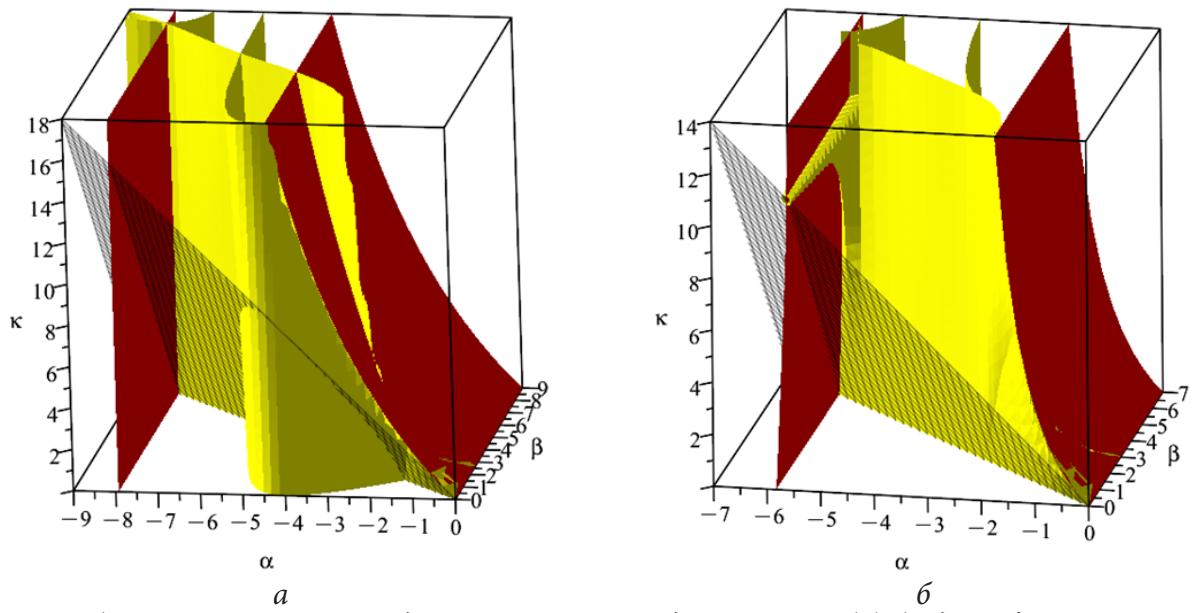


Рис. 1. Области устойчивости двухэтапного метода SK-ROCK (а) без демпфирования $\varepsilon = 0$ и (б) с оптимальным для P -устойчивости демпфированием $\varepsilon = 1.05$

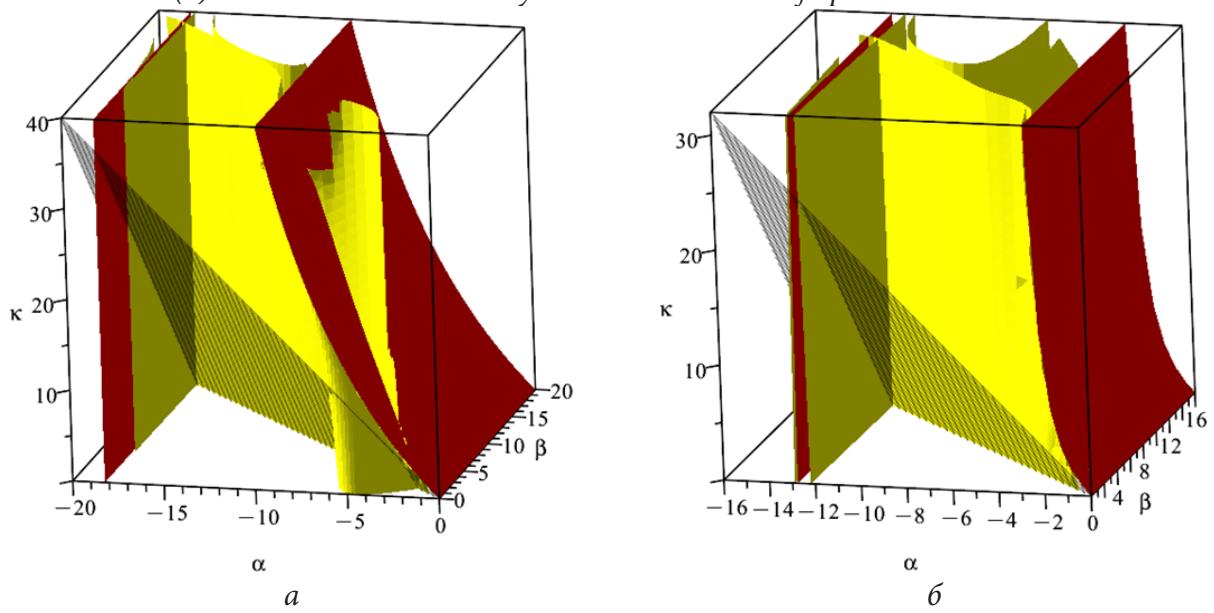


Рис. 2. Области устойчивости трёхэтапного метода SK-ROCK (а) без демпфирования $\varepsilon = 0$ и (б) с оптимальным для P -устойчивости демпфированием $\varepsilon = 0.85$

S-ROCK [7] приводит к заметному сокращению длины области устойчивости вдоль α . В то же время можно надеяться [2], что при увеличении числа этапов s необходимое демпфирование будет уменьшаться и на методы с большим количеством этапов оно окажет меньшее влияние.

3. Численные примеры

Для нескольких наборов параметров (α, β, κ) мы проводим решение уравнения (3) методом (2) с двумя и тремя этапами с постоянным шагом $h = 1/8$ на отрезке $[0, 10]$. В качестве предыстории выбрана константная функция $\varphi(t) = 1$, запаздывание $\tau = 1$. По результатам 10000 испытаний мы получаем оценку математического ожидания квадрата решения. Графики на рис. 3 и 4 отражают ожидаемое поведение методов.

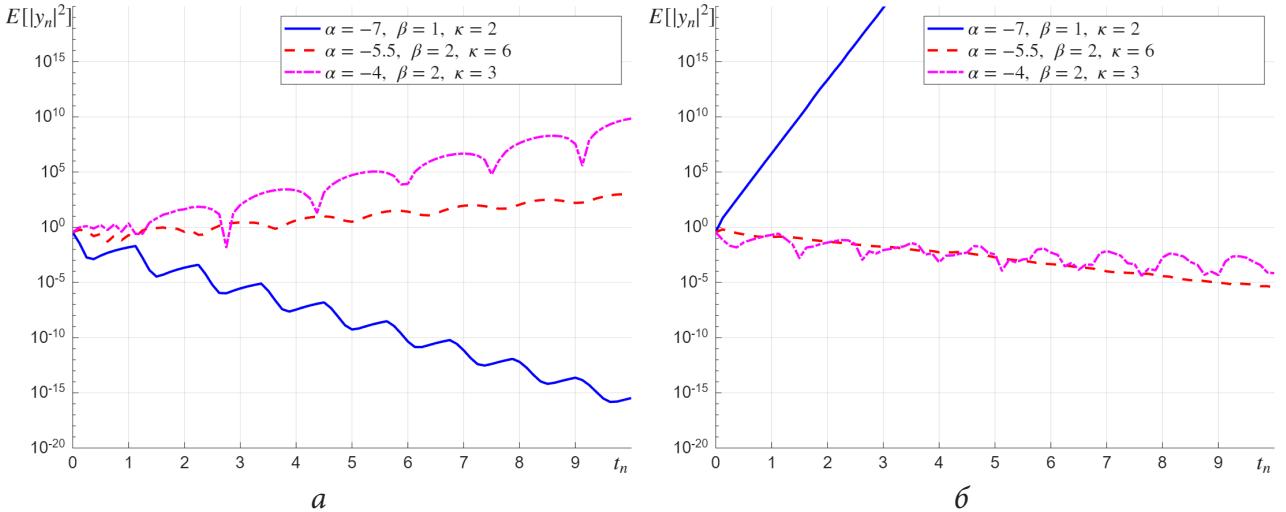


Рис. 3. Поведение усреднённого решения задачи (3) двухэтапным методом SK-ROCK с (а) $\varepsilon = 0$ и (б) $\varepsilon = 1.05$

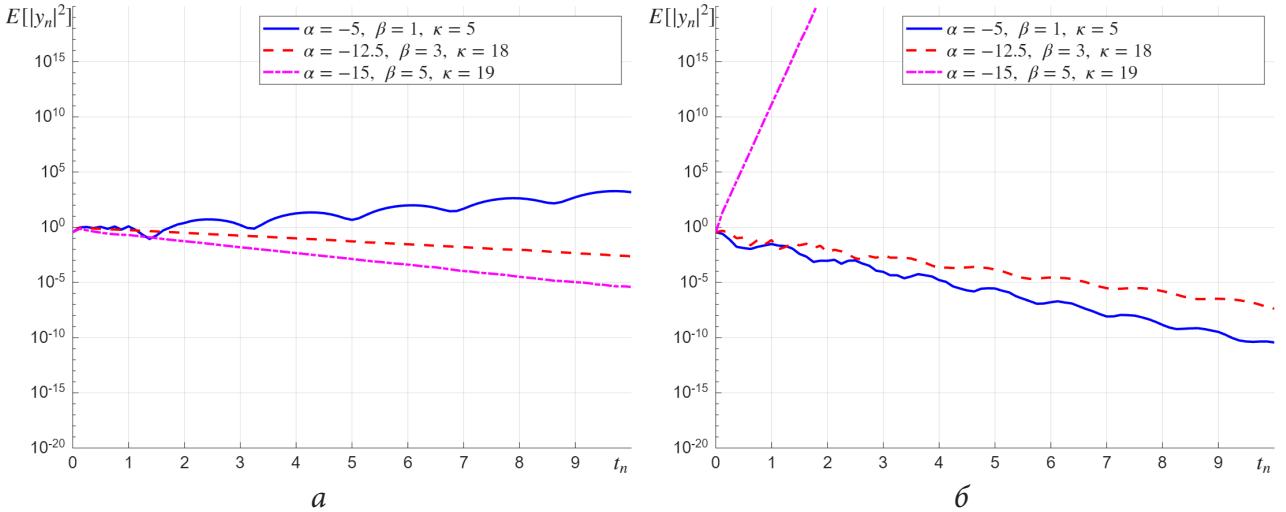


Рис. 4. Поведение усреднённого решения задачи (3) трехэтапным методом SK-ROCK с (а) $\varepsilon = 0$ и (б) $\varepsilon = 0.85$

Заключение

Представленный анализ является попыткой изучить устойчивость численного решения стохастического уравнения с запаздыванием. Сложность формул, которые возникают при ненулевом демпфировании чебышёвских методов в применении к таким уравнениям, требует

очень трудоёмких вычислений для определения оптимального демпфирования, потому в работе представлены лишь самые простые из методов SK-ROCK с малым числом этапов. В то же время результаты позволяют в первом приближении разделить анализ среднеквадратической устойчивости для SK-ROCK в применении к СДУ и Р-устойчивости ROCK-методов для дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Литература

1. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: Пер. с англ. / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
2. *Eremin A. S.* Real-values stability analysis of Runge–Kutta–Chebyshev methods for delay differential equations / A. S. Eremin, T. S. Zubakhina // Proc. Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math, ICNAAM 2020, Sep. 17–23, 2020, Rhodes, Greece / AIP Conference Proceedings. – 2022. –Vol. 2425. Art. no. 090006. – DOI: 10.1063/5.0081530.
3. *Eremin A. S.* P-stability of second order Runge–Kutta–Chebyshev methods for delay differential equations / A. S. Eremin, T. S. Zubakhina // Proc. Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math, ICNAAM 2021, Sep. 20–26, 2021, Rhodes, Greece / AIP Conference Proceedings. – 2023. –Vol. 2849. Art. no. 070003. – DOI: 10.1063/5.0162154.
4. *Abdulle A.* S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations / A. Abdulle, S. Cirilli // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2008. – Vol. 30. P. 997–1014. – DOI: 10.1137/070679375.
5. *Abdulle A.* S-ROCK methods for stiff Itô SDEs / A. Abdulle, T. Li // Communications in Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 6, Iss. 4. – P. 845–868.
6. *Komori Y.* Strong first order S-ROCK methods for stochastic differential equations / Y. Komori, K. Burrage // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2013. –Vol. 242. – P. 261–274. DOI: 10.1016/j.cam.2012.10.026.
7. *Komori Y.* S-ROCK methods for stochastic delay differential equations with one fixed delay / Y. Komori, A. S. Eremin, K. Burrage // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 353. – P. 345–354. – DOI: 10.1016/j.cam.2018.12.042.
8. *Abdulle A.* Optimal explicit stabilized integrator of weak order 1 for stiff and ergodic stochastic differential equations / A. Abdulle, I. Almuslimani, G. Vilmart // SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. – 2018. – Vol. 6, № 2. – P. 937–964. – DOI: 10.1137/17M1145859.
9. *Huang C.* Delay-dependent stability analysis of numerical methods for stochastic delay differential equations / C. Huang, S. Gan, D. Wang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 236, Iss. 14. – P. 3514–3527. DOI: 10.1016/j.cam.2012.03.003.
10. *Mao X.* Exponential stability of equidistant Euler–Maruyama approximations of stochastic differential delay equations / X. Mao // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 200, Iss. 1. – P. 297–316. DOI: 10.1016/j.cam.2005.11.035.
11. *Eremin A. S.* Stability analysis of first order S-ROCK methods for stochastic differential equations with delays in the deterministic part / A. S. Eremin // Proc. Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math, ICNAAM 2022, Sep. 19–25, 2022, Heraklion, Greece / AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3094. Art. no. 220006. – DOI: 10.1063/5.0210681.
12. *Bellen A.* Numerical Methods for Delay Differential Equations / A. Bellen, M. Zennaro – Oxford: Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2013. – 410 p.
13. *Liu M.* Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for a linear stochastic differential delay equation /M. Liu, W. Cao, Z. Fan // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2004 – Vol. 170, Iss. 2. – P. 255–268. DOI: 10.1016/j.cam.2004.01.040.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО МЕРЕ

К. И. Казакевич

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается функционал с производными по мере, описывающий полную энергию разрывной струны, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими не только к потере гладкости у решения, но и разрывности самого решения. Получены достаточные условия слабого минимума функционала в классе абсолютно непрерывных функций, первая производная которых суммируема с квадратом.

Ключевые слова: функционал, интеграл Стильеса, производная по мере, слабый экстремум, достаточные условия, краевая задача, разрывная струна.

Введение

В задачах математической физики и механики деформируемых тел часто возникают функционалы, зависящие от производных функций, определённых по мере. Одним из таких является функционал с интегралом Стильеса, который описывает полную потенциальную энергию разрывной струны с внутренними и внешними особенностями — например, систем, содержащих разрывные элементы и взаимодействующих с неоднородной средой.

Анализ подобных функционалов приводит к необходимости рассмотрения краевых задач с производными по мере. В ряде работ получены необходимые условия экстремума для таких функционалов, однако вопросы, связанные с достаточными условиями слабого минимума, требуют дальнейшего изучения.

В настоящей работе рассматривается функционал с интегралом Стильеса на множестве μ -абсолютно непрерывных функций, первая производная которых суммируема с квадратом. Получены достаточные условия слабого экстремума указанного функционала.

1. Основной результат

На множестве E — μ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0, \ell]}_s$ функций, первая производная $u'_\mu(x)$ которых имеет конечное на $\overline{[0, \ell]}_\mu$ измерение, удовлетворяющее условиям $u(0) = u(\ell) = 0$.

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии разрывной струны с внутренними и внешними особенностями — в ней есть дефекты, утяжеления, или она состоит из частей с разными свойствами. Также на неё действует ещё и внешняя среда, которая также не везде одинакова (например, в некоторых точках есть «толчки»):

$$\varphi(u) = \int_0^\ell \frac{p u'_\mu^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q] - \int_0^\ell u d[F]. \quad (1)$$

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$, определенная на множестве $\overline{[0, \ell]}_\mu$, имеет конечное на этом множестве измерение, если при произвольном разбиении множества $\overline{[0, \ell]}_\mu$ точками $x_i \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ сумма $i = (0, f, \dots, \dots, n)$

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|$$

ограничена, то есть существует константа $C > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| < C$$

для произвольного разбиения множества $\overline{[0, \ell]}_u$ конечным набором точек $\{x_i\}$. Иными словами — мы берем этот отрезок и устанавливаем в него точки-гвозди в произвольных местах. Элементы этой суммы и есть наши «гвозди»: x_0 здесь — первый гвоздь, x_n — последний гвоздь. И для каждого маленького отрезка между гвоздями $[x_{i-1}, x_i]$ мы смотрим, насколько изменилась функция. $[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$ — модуль разности. При этом нас не интересует, выросли мы или упали, нас интересует «амплитуда нашего движения» на этом участке. Для этого мы и складываем все эти «амплитуды» для всех участков.

Данная сумма — это общая длина всех наших «подъемов» и «спусков» при движении от начала до конца по выбранным нами точкам. Это как, если бы мы измерили длину нити, которую нужно было бы растянуть вертикально, чтобы пройти весь график по этим точкам. Здесь мы говорим, что у функции конечное изменение, если независимо от того, как мы устанавливаем наши гвозди-точки (даже если мы будем ставить их бесконечно близко друг к другу), эта общая длина «подъемов и спусков» никогда не превысит какую-то определенную величину C (функция $\varphi(x)$ «не может бесконечно сильно дергаться» на своем промежутке). Тем самым, мы можем гарантировать, что функции, с которыми они работают (и их производные), не ведут себя «совсем патологически».

Заметим, что функционал (1) является функционалом потенциальной системы «разрывной» струны (см. [4]). В работе [4] получено необходимое условие минимума $\varphi(u)$ на E в виде интегро-дифференциального уравнения

$$pu'_\mu(x) - pu'_\mu(0) = \int_0^x ud[Q] - F(x) + F(0) \quad (2)$$

дополненное краевыми условиями $u(0) = u(\ell) = 0$.

Также была изучена спектральная задача:

$$\begin{cases} pu'_\mu(x) - pu'_\mu(0) = \int_0^x ud[Q] - \lambda \int_0^x ud[M], \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

В частности, доказана осцилляционность спектра.

Полученный в [4] результат важен для нашего исследования. Он даёт мощный математический инструмент. Условие «спектр положителен» в дальнейшем поможет нам свестись к проверке, что самое первое (наименьшее) собственное число $\lambda_1 > 0$. Если это так, то все остальные λ_n будут заведомо положительными благодаря осцилляционности.

В дальнейшем мы получим достаточные условия слабого экстремума функционала (1) на E .

Нам удобнее (2) заменить на более привычное для теории дифференциальных уравнений, уравнением:

$$-(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + (uQ)'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}. \quad (3)$$

Понимая уравнение (3) в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ как два равенства:

$$-\Delta^-(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi - 0)\Delta^-Q(\xi) = \Delta^-F(\xi), \quad (4)$$

$$-\Delta^+(pu'_\mu)(\xi) + u(\xi + 0)\Delta^+Q(\xi) = \Delta^+F(\xi), \quad (5)$$

где $\Delta^-f(x) = f(x) - f(x - 0)$ и $\Delta^+f(\xi) = f(\xi + 0) - f(\xi)$ — левый и правый скачки функции $f(x)$ в точке x соответственно.

Физический смысл в том, что эти уравнения — условия баланса сил в точке разрыва.

Пусть $u_0(x)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + (uQ)'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}, \\ u(0) = u(\ell) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Пусть спектр (набор собственных чисел) задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + (uQ)'_{[\sigma]} = \lambda u; \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

положителен. Тогда функция $u_0(x)$, которая является решением краевой задачи (6), доставляет слабый минимум функционалу энергии (1) на множестве E , то есть действительно является состоянием с минимальной потенциальной энергией.

Заключение

В работе исследован функционал с производной по мере, описывающий потенциальную энергию разрывной струны с внутренними особенностями. Получены достаточные условия слабого экстремума.

Благодарности

Выражаю свои глубочайшие благодарности своему научному руководителю — Шаброву Сергею Александровичу.

Литература

1. Шабров С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, № 1. – С 52–55.
2. Шабров С. А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере: Дисс... доктора физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. консультант А. Д. Баев. – 20.12.2017. – 412 с.
3. Шабров С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2013. – № 1. – С. 232–250.
4. Зверева М. Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильеса: Дисс... кандидата физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. руководитель Ю.В. Покорный. – 15.11.2005. – 120 с.

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЭРМИТА

В. В. Калиниченко¹, Э. Л. Шишкина^{1,2,3}

¹Воронежский государственный университет

²Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова

³Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Аннотация. В статье проводится систематическое исследование полиномов Эрмита — классических ортогональных многочленов, играющих фундаментальную роль в различных разделах математики и теоретической физики. Подробно изучаются их аналитические свойства, включая явные представления, рекуррентные соотношения, производящие функции и свойства ортогональности. Особое внимание уделяется приложениям полиномов Эрмита в квантовой механике, теории вероятностей, численном анализе, обработке сигналов, теории информации и управления. Работа демонстрирует универсальность и мощь аппарата полиномов Эрмита для решения широкого круга прикладных задач.

Ключевые слова: полиномы Эрмита, ортогональные многочлены, квантовый гармонический осциллятор, ряды Фурье — Эрмита, разложение Эджвортса, численные методы, метод Галёркина, обработка сигналов, теория информации.

Введение

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ занимают особое место в семействе классических ортогональных многочленов. Впервые они были введены П. Л. Чебышевым в 1859 году при исследовании предельных свойств некоторых классов функций. Более глубокое изучение этих полиномов было проведено Шарлем Эрмитом в 1864 году, чьё имя они впоследствии и получили [1–3].

Исторически полиномы Эрмита возникли в связи с задачами математической физики, в частности, при решении дифференциальных уравнений параболического типа. Однако со временем область их применения существенно расширилась, охватив такие разделы науки, как квантовая механика, теория вероятностей, численный анализ, теория сигналов и многие другие.

Фундаментальное значение полиномов Эрмита связано с тем, что они являются собственными функциями сингулярной задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка специального вида. Это свойство позволяет использовать их для разложения произвольных функций в ряды по системе полиномов Эрмита — аналоги рядов Фурье.

Важной особенностью полиномов Эрмита является то, что они не принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$ функций, интегрируемых с квадратом на всей вещественной оси, но являются ортогональными в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Это свойство открывает возможности для построения различных аппроксимационных методов и решения задач математической физики на неограниченных областях.

Цель настоящей работы — систематическое изложение теории полиномов Эрмита, включая их основные свойства, методы вычисления и разнообразные приложения в современной математике и физике.

Основные свойства полиномов Эрмита

Полиномы Эрмита могут быть определены несколькими эквивалентными способами. Наиболее компактное определение задаётся формулой Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Это представление непосредственно связывает полиномы Эрмита с функцией Гаусса и её производными.

Явный вид полинома Эрмита степени n может быть получен из формулы Родрига и имеет вид [4]

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначает целую часть от $\left[\frac{n}{2}\right]$. Из этой формулы непосредственно видно, что полиномы Эрмита являются целыми функциями и обладают свойством чётности:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Для практических вычислений особенно важны рекуррентные соотношения, позволяющие последовательно вычислять полиномы Эрмита высоких степеней. Основное рекуррентное соотношение имеет вид:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

с начальными условиями:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Это соотношение существенно упрощает вычисление значений полиномов Эрмита и лежит в основе многих численных алгоритмов.

Также полезно соотношение, связывающее производные полиномов Эрмита:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2_n H_{n-1}(x).$$

Важным инструментом теории полиномов Эрмита является производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = e^{2xz - z^2}.$$

Это представление позволяет компактно записывать различные тождества, связанные с полиномами Эрмита, и является мощным инструментом при доказательстве их свойств.

Одно из наиболее важных свойств полиномы Эрмита — их ортогональность с весовой функцией на всей вещественной оси:

$$e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Это свойство позволяет использовать систему полиномов Эрмита как ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

Полиномы Эрмита удовлетворяют линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

где $y = H_n(x)$. Это уравнение является частным случаем уравнения Штурма — Лиувилля и играет важную роль в различных приложениях.

Разложение функций в ряды Фурье — Эрмита

Благодаря свойству ортогональности, полиномы Эрмита образуют полную систему в пространстве $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Это означает, что для любой функции $f(x)$ из этого пространства справедливо разложение в ряд Фурье — Эрмита:

$$f(x) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x),$$

где коэффициенты Фурье — Эрмита определяются формулой:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx.$$

Это разложение сходится к функции $f(x)$ в смысле нормы пространства $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

Рассмотрим пример разложения функций в ряд Фурье-Эрмита. Возьмем функцию $f(x) = e^{-a^2 x^2}$. Тогда коэффициенты Фурье — Эрмита будут иметь вид:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

В силу четности этой функции все нечетные коэффициенты a_n равны нулю. А для четных, используя интегральное представление многочленов Эрмита

Имеем

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2n}(x) dx = \frac{2(-1)^n}{a(2n)! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(1+\frac{1}{a^2}\right)t^2} t^{2n} dt = \frac{(-1)^n a^{2n} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)! \sqrt{\pi} (1+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Следовательно, используя формулу удвоения для гамма-функции, получим

$$e^{-a^2 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)! \sqrt{\pi} (1+a^2)^{\frac{n+1}{2}}} H_{2n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{\frac{n+1}{2}}} H_{2n}(x).$$

Из этой формулы нетрудно получить разложение для интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n} n! (2n+1)} H_{2n+1}(x).$$

Этот ряд сходится при всяком x и гораздо быстрее, чем степенное разложение интеграла вероятности.

Приложения полиномов Эрмита

Наиболее известное приложение полиномов Эрмита связано с квантовой механикой, а именно — с решением уравнения Шрёдингера для квантового гармонического осциллятора. В частности, волновые функции стационарных состояний гармонического осциллятора выражаются через полиномы Эрмита:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Эти волновые функции являются собственными функциями оператора Гамильтона гармонического осциллятора и образуют полный ортонормированный базис в пространстве квадратично интегрируемых функций.

Полиномы Эрмита также используются при решении уравнения Шрёдингера для других потенциалов, например, для анизотропного осциллятора и в теории когерентных состояний.

В теории вероятностей полиномы Эрмита естественным образом возникают в связи с нормальным распределением. Они используются в разложении Эджворта — асимптотическом разложении функции плотности распределения, близкого к нормальному.

Разложение Эджворта для функции плотности вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n H_n(x) \right],$$

где коэффициенты c_n выражаются через кумулянты распределения. Это разложение позволяет

ет учитывать отклонения от нормальности и получать более точные аппроксимации для различных статистических распределений.

Другое вероятностное приложение полиномов Эрмита — это разложение в хаос случайных процессов. Концепция однородного хаоса, введенная Винером в 1938 году, предполагает изучение квадратично интегрируемых нелинейных функционалов броуновского движения. Эта концепция была переосмыслена Кэмероном и Мартином, которые разработали ортогональный базис для этих функционалов, используя так называемые функционалы Фурье-Эрмита, образованные из тензорных произведений полиномов Эрмита. Позднее, в 1951 году, Ито предложил конструкцию кратных винеровских интегралов для использования в ортогональном разложении пространства квадратично интегрируемых броуновских функционалов

В численном анализе полиномы Эрмита находят разнообразные применения:

1. Аппроксимация функций — благодаря своей ортогональности на всей вещественной оси, полиномы Эрмита эффективно используются для аппроксимации функций, заданных на неограниченных интервалах [4].

2. Решение дифференциальных уравнений — метод Галёркина с использованием полиномов Эрмита позволяет решать дифференциальные уравнения, сводя задачу к системе алгебраических уравнений. Этот метод особенно эффективен для задач с граничными условиями на бесконечности [5].

3. Метод конечных элементов — полиномы Эрмита используются в качестве базисных функций в методах конечных элементов для задач на неограниченных областях [6].

4. Численное интегрирование — квадратурные формулы Гаусса-Эрмита позволяют эффективно вычислять интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ [7].

Заключение

Проведённое исследование демонстрирует фундаментальное значение полиномов Эрмита в современной математике и физике. Эти классические ортогональные многочлены обладают богатой структурой и многочисленными замечательными свойствами, которые делают их незаменимым инструментом в различных прикладных областях.

Аналитическая теория полиномов Эрмита, включающая их явные представления, рекуррентные соотношения, производящие функции и свойства ортогональности, представляет собой законченную и элегантную математическую конструкцию. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Эрмита, связывает их с важными задачами математической физики.

Широкий спектр приложений полиномов Эрмита — от квантовой механики до обработки сигналов и теории управления — свидетельствует об их универсальности и практической значимости. Особенно важно их применение в задачах на неограниченных областях, где традиционные методы часто оказываются неэффективными.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на развитие методов численного интегрирования с использованием полиномов Эрмита, создание эффективных алгоритмов для разложения функций в ряды Фурье — Эрмита, а также на применение этих методов к решению нелинейных задач математической физики.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М. : Наука, 1974.

2. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов. — М. : Гостехиздат, 1950.

3. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М. : Наука, 1985.
4. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены. – М. : Наука, 1979.
5. Clenshaw C. W. The numerical solution of ordinary differential equations in Hermite series // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1957. – V. 53. – P. 134–149.
6. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М. : Мир, 1968.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М. : ГИФМЛ, 1961.

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ВЕКУА — ЭРДЕЙИ — ЛАУНДЕСА

А. В. Каятский¹, Э. Л. Шишкина^{1,2,3}

¹Воронежский государственный университет

²Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова

³Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. В статье изучаются операторы преобразования типа Векуа — Эрдейи — Ландеса, которые применяются к первой производной. Эти операторы применяются для решения разнообразных задач для дифференциальных уравнений, в частности для уравнений типа теплопроводности.

Ключевые слова: оператор преобразования, сплетающее свойство, интегральный оператор, ядро, операторы Векуа — Эрдейи — Ландеса, оператор Вольтерра, сплетающий оператор.

Введение

Метод операторов преобразования используется для решения различных задач (см. [1]). В статье рассматриваются результаты по построению и применению операторов преобразования для операторов первого и второго порядков. Также приводятся приложения точных представлений для операторов преобразования к уравнениям в частных производных. В частности, показано, как методы, основанные на полных семействах решений, могут быть распространены на другие уравнения.

Дадим определение оператора преобразования, следуя [1]. Пусть у нас есть два оператора (A, B). Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования*, если выполняется следующее соотношение

$$TA = BT. \quad (1)$$

Соотношение (1) называется *сплетающим свойством*, а оператор T также называют *сплетающим оператором*.

Оператор T обычно является интегральным оператором с некоторым ядром, вид которого иногда можно найти явно.

Первостепенное значение для метода операторов преобразования имеет выбор соответствующих пространств функций, где справедливо равенство (1).

Ключевые концепции и проблемы теории операторов преобразования излагаются в обзоре [2]. Кроме того, в [2] приводится перечень наиболее значимых применений операторов преобразования в обратных задачах, теории рассеяния, спектральном анализе, линейных и нелинейных дифференциальных уравнениях, построении солитонов, а также в обобщенных аналитических функциях, краевых задачах, теории дробного интегро-дифференцирования и вложениях функциональных пространств.

Одним из приложений операторов преобразования является то, что они устанавливают связь между решениями двух задач математической физики, одна из задач рассматривается как модельная.

Например, в статье [3], получено следующее утверждение.

Пусть n — целое положительное число, $q_1 = q_1(x)$ и $q_2 = q_2(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_0^a t^a |q_i(t)| dt < +\infty, \quad i = 1, 2$$

при любом конечном $a > 0$ и некотором положительном $a < \frac{1}{2}$.

Теорема [3]. Для любой пары дифференциальных операторов L_1 и L_2 вида,

$$L_1 y = y'' - \left[q_1 + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y,$$

$$L_2 y = y'' - \left[q_2 + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y$$

существует оператор Вольтерра $V_{L_1 L_2}$ переводящий решение дифференциального уравнения

$$L_1 y + s^2 y = 0$$

с условием в нуле вида

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^n} = \frac{2^{\frac{1}{2}-n}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

в решение дифференциального уравнения

$$L_2 y + s^2 y = 0$$

с тем же условие в нуле.

В нашей статье получен специальный класс операторов преобразования, которые сплетают операторы $A + \lambda_1$ и $A + \lambda_2$, где $A: L_1 \rightarrow L_2$ — некоторый оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Такие операторы преобразования появляются в работах А. Эрдэйи, И. Н. Векуа и Дж. С. Лаундеса (см. ссылки в [5]). Поэтому их естественно называть операторами Векуа — Эрдэйи — Лаундеса (ВЭЛ).

Используя оператор преобразования ВЭЛ, получим утверждение о связи между решениями задач Коши для уравнений $w_t = Aw$ и $w_t \pm c^2 w = Aw$, где $w = w(x, t)$, $t, c \in \mathbb{R}$, A — линейный оператор, действующий по $x \in \mathbb{R}^n$. К этому типу относятся, например, уравнение теплопроводности, одномерное уравнение Шрёдингера. Такие уравнение часто встречается в теории тепло- и массопереноса. Они описывают нестационарные тепловые процессы в покоящейся среде или твердом теле с постоянной температуропроводностью.

Построение операторов преобразования типа Векуа — Эрдэйи — Лаундеса для первой производной в форме операторов Вольтерра второго рода

В этом разделе мы строим операторы преобразования L_c^\pm со сплетающим свойством

$$L_c^\pm Df = (D \pm c^2) L_c^\pm f.$$

Процесс построения включает интегрирование по частям и дифференцирование интеграла по параметру, а также решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Теорема 1. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда операторы преобразования L_c^\pm , удовлетворяющие тождеству

$$L_c^\pm Df = (D \pm c^2) L_c^\pm f, \quad (2)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, имеют вид операторов Вольтерра

$$(L_c^\pm f)(t) = \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

ядра которых $K^\pm(t, \tau) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ имеют вид

$$K^\pm(t, \tau) = e^{\mp c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t), \quad (4)$$

где $\Phi(s)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая на \mathbb{R} , функция.

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^+(-t, t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}, \quad K^+(t, t) = 0, \quad (5)$$

ядро K^+ имеет вид

$$K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(t - \tau)e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}.$$

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^-(t, -t)}{dt} = \frac{c^2}{2}, \quad K^-(t, t) = 0, \quad (6)$$

ядро K^- имеет вид

$$K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(\tau - t)e^{\frac{c^2}{2}(\tau+\tau)}.$$

Доказательство.

Мы ищем оператор преобразования, удовлетворяющий тождеству (2), в форме оператора Вольтерра (3). Здесь ядро $K^\pm(t, \tau)$ — гладкая по обеим переменным на \mathbb{R}^2 функция.

Рассмотрим сначала случай

$$L_c^+ Df = (D + c^2) L_c^+ f.$$

Имеем

$$\begin{aligned} L_c^+ Df &= \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau, \\ (D + c^2) L_c^+ f &= \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + c^2 \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Подстановка в (2) приводит к соотношению

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + c^2 \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Поскольку, интегрирование по частям приводит к

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = K^+(t, t) f(t) - K^+(t, -t) f(-t) - \int_{-t}^t K_\tau^+(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

а дифференцирование интеграла по параметру к

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_{-t}^t K_\tau^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + K^+(t, t) f(t) - K^+(t, -t) f(-t),$$

то мы получаем

$$-K_\tau^+(t, \tau) = K_\tau^+(t, \tau) + c^2 K^+(t, \tau). \quad (7)$$

Уравнение (7) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Запишем его в виде

$$K_\tau^+(t, \tau) + K^+(t, \tau) = -c^2 K^+(t, \tau). \quad (8)$$

Используя метод характеристик Лагранжа для решения уравнения в частных производных первого порядка для уравнения (8) составим систему уравнений

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} = -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} = ds.$$

Найдем первое характеристическое уравнение:

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} \Rightarrow \tau - t = C_1.$$

Найдем второе характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{1} = -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} &\Rightarrow \tau = -\frac{1}{c^2} \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow -c^2 \tau = \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow \\ c^2 \ln e^\tau + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) = 0 &\Rightarrow \ln e^{c^2 \tau} + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \ln(c^2 e^{c^2 \tau} K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \\ K^+(t, \tau) \cdot e^{c^2 \tau} = C_2. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид

$$K^+(t, \tau) = e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t), \quad (9)$$

где $\Phi(s)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Действительно,

$$\begin{aligned} K_\tau^+(t, \tau) &= -c^2 e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t) + e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi'(\tau - t), \\ K_t^+(t, \tau) &= -e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi'(\tau - t), \end{aligned}$$

что и дает (8) и первый случай из (4) доказан.

Чтобы найти конкретный вид функции $\Phi(s)$, используем дополнительные условия (5). Введение новых переменных

$$u = \frac{t + \tau}{2}, \quad v = \frac{\tau - t}{2} \Rightarrow \tau = u + v, \quad t = u - v$$

и использование обозначений $H^+(u, v) = K^+(u - v, u + v) = K^+(t, \tau)$ приводит задачу (8)–(5) к задаче

$$\begin{cases} H_u^+(u, v) = -c^2 H^+(u, v); \\ H^+(0, v) = -\frac{c^2}{2} v. \end{cases}$$

Поскольку K^+ имеет вид (9), то

$$H^+(u, v) = K^+(u + v, u - v) = e^{-c^2(u+v)} \cdot \Phi(2v).$$

Из условия $H^+(0, v) = -\frac{c^2}{2} v$ получаем

$$H^+(0, v) = e^{-c^2 v} \cdot \Phi(2v) = -\frac{c^2}{2} v.$$

Тогда

$$\Phi(2v) = e^{c^2 v} \cdot \left(-\frac{c^2}{2} v \right)$$

и

$$H^+(u, v) = K^+(u + v, u - v) = -\frac{c^2}{2} v e^{-c^2 u}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (\tau - t) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}. \quad (10)$$

Легко видеть, что

$$K^+(t, \tau) = 0, \quad K^+(-t, t) = -\frac{c^2}{2} t, \quad \frac{dK^+(-t, t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}.$$

Следовательно, условия (5) справедливы.

Проверим выполнение (8):

$$K_\tau^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} \left(c^2 (\tau - t) - 2 \right),$$

$$K_t^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(\tau-t) + 2),$$

тогда

$$K_\tau^+(t, \tau) + K_t^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(\tau-2) - 2 + c^2(\tau-t) + 2) = \frac{c^4}{4} (\tau-t) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} = -c^2 K^+(t, \tau).$$

Получаем, что (10) является ядром K^+ оператора (3) при выполнении условий (5).

Рассмотрим теперь второе уравнение

$$L_c^- Df = (D - c^2) L_c^- f,$$

которое позволяет найти уравнение для ядра вида

$$K_\tau^-(t, \tau) + K_t^-(t, \tau) = c^2 K^-(t, \tau).$$

Аналогично предыдущему случаю, находим, что общее решение последнего уравнения имеет вид

$$K^-(t, \tau) = e^{c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t),$$

где $\Phi(s)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция и второй случай из (4) доказан. Кроме того,

$$K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (\tau - t) e^{\frac{c^2}{2}(\tau-t)}$$

является ядром K^- оператора (3) при выполнении условий (6). Доказательство закончено.

Замечание. Таким же образом доказывается, что если f — основная функция, например, шварцева: $f \in S(\mathbb{R})$, а Φ — обобщенная функция, например, $\Phi \in S'(\mathbb{R})$, то операторы преобразования L_c^\pm , удовлетворяющие тождеству

$$L_c^\pm Df = (D \pm c^2) L_c^\pm f, \quad (11)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, имеют вид операторов Вольтерра

$$(L_c^\pm f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t) f(\tau) d\tau = (\Phi(\tau) * e^{\mp c^2 \tau} f(\tau))(t). \quad (12)$$

В частности, можно положить $\Phi(s)$ равной дельта-функции: $\Phi(s) = \delta(s)$. Тогда $(L_c^\pm f)(t) = e^{\mp c^2 t} f(t)$. Такой вид оператора преобразование удобно использовать, если присутствует начальное условие: при $t = 0$.

Теорема 2. Пусть A — линейный оператор, действующий по переменным $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а w — решение уравнения

$$w_t = Aw, \quad w = w(x, t). \quad (13)$$

Тогда функция

$$w^c = L_c^\pm w = \int_{-t}^t e^{\mp c^2 \tau} \Phi(\tau - t) w(x, \tau) d\tau,$$

где L_c^+ — оператор преобразования из теоремы 1 является решением уравнения

$$w_t^c \pm c^2 w^c = Aw^c, \quad w^c = w^c(x, t). \quad (14)$$

Доказательство. Покажем, что если w удовлетворяет уравнению (13), то w^c удовлетворяет уравнению (14). В силу (2), имеем

$$(D_t + c^2) w^c = (D_t + c^2) L_c^+ w = L_c^+ D_t w = L_c^+ Aw = AL_c^+ w = Aw^c,$$

получаем, что $(D_t + c^2) w^c = Aw^c$ и w^c удовлетворяют уравнению (14)

Пример. Приведем элементарный пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} w_t = aw_{xx}, & w = w(x, t); \\ w(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

В этом случае $A = a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Решение этой задачи имеет вид

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} f(\xi) d\xi.$$

Тогда решение возмущенной задачи

$$\begin{cases} w_t = aw_{xx} - c^2 w, & w = w(x, t); \\ w(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

будет иметь вид

$$w^c = L_c^+ w = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 \tau} \Phi(\tau - t) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau} - c^2 \tau} \Phi(\tau - t) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

Положим $\Phi(s) = \delta(s)$, тогда

$$w^c = L_c^+ w = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at} - c^2 t} f(\xi) d\xi.$$

Заключение

В статье был построен простой оператор преобразования типа Векуа — Эрдейи — Лаундеса для первой производной, который иллюстрирует методы получения решений задач для возмущенного уравнения, если известно решение задачи для невозмущенного уравнения.

Литература

1. Shishkina E. L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Elsevier, Amsterdam, 2020. – 592 p.
2. Ситник С. М. Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. – Владикавказ : ВНЦ РАН, 2008. – С. 226–293.
3. Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле // Уч. зап. Харьковского мат. об-ва. – 1957. – № 5. – С. 49–86.
4. Kravchenko V. V., Torba S. M. Transmutation operators and a new representation for solutions of perturbed Bessel equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2021. – V. 44. – P. 6344–6375.
5. Шишкина Э. Л. Приложения операторов преобразования типа Векуа — Эрдейи — Лаундеса к дифференциальным уравнениям / Э. Л. Шишкина, Х. Алзамили, А. М. Кудоси, С. М. Ситник // Прикладная математика & Физика. – 2024. – № 56 (1). – С. 27–34.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ

Д. С. Копылов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье изучаются полиномы Чебышева, а также функции одной переменной, выраженные через полиномы Чебышева. Такие полиномы применяются к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: полином Чебышева, метод ортогональных полиномов, обыкновенное дифференциальное уравнение.

Введение

Классические ортогональные многочлены — Чебышёва, Лежандра, Эрмита, Лагерра, Якоби и другие — традиционно используются как мощный математический инструмент при решении задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Они занимают важное место в теоретических исследованиях, математической физике, вычислительной математике и квантовой механике.

В данной статье рассматриваются полиномы Чебышёва [1], функции одной переменной, выраженные через полиномы Чебышева и применение этих полиномов к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ представляют собой полиномы, связанные с тригонометрическими функциями. Их можно определить несколькими эквивалентными способами. Один из способов определения полиномов Чебышева первого рода $T_n(x)$ имеет вид:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

Или

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \text{ где } x = \cos(n\theta).$$

Из определения видно, что

$$T_{-n}(x) = T_n(x).$$

Также

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x),$$

а именно $T_n(x)$ является нечётной или чётной функцией переменной x , в зависимости от того, является ли n нечётным или чётным числом, соответственно.

Имеем

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n.$$

Полиномы Чебышева $\{T_n(x)\}$ образуют последовательность полиномов, ортогональных с весовой функцией

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

на интервале $(-1,1)$, а именно

$$\langle T_1, T_k \rangle_w = \int_{-1}^1 T_1(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ненулевые значения этих интегралов, при $l = k$, определяются выражением

$$\int_{-1}^1 (T_0(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\int_{-1}^1 (T_k(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, k \neq 0$$

Для полиномов Чебышева первого рода справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Из этих соотношений следует, что многочлены могут быть определены в явном виде через определитель трёхдиагональной матрицы размера $n \times n$ вида

$$T_n(x) = \det \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Несколько первых полиномов Чебышёва первого рода имеют вид:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1. \end{aligned}$$

Полином $T_n(x)$ имеет на отрезке $[-1,1]$ ровно n корней, расположенных в точках

$$x_k = \cos \left(\pi \cdot \frac{k + \frac{1}{2}}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Любую функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[-1,1]$ можно приблизить следующей формулой:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} c_j T_{j(x)} - \frac{1}{2} \cdot c_0$$

где

$$c_j = \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \cdot T_j(x_k) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\cos \left(\pi \cdot \frac{k + \frac{1}{2}}{N} \right) \right) \cdot \cos \left(\pi j \cdot \frac{k + \frac{1}{2}}{N} \right)$$

при $j = 0, 1, \dots, N-1$, которая в точности верна для всех x , являющихся корнями многочлена $T_N(x)$.

Для производных полинома Чебышёва справедливо рекуррентное соотношение

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} \frac{d}{dx} T_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Общая формула для производной многочлена Чебышёва при $x = \pm 1$ имеет вид:

$$\left(\frac{d^p T_n(x)}{dx^p} \right)_{x=\pm 1} = (\pm 1)^{n+p} \cdot \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(n^2 - k^2)}{(2k+1)} \right).$$

Эта формула очень полезна при численном решении задач на собственные значения.

Функции одной переменной, выраженные через полиномы Чебышева

Пусть функция $f(x)$ выражается в виде равномерно сходящегося ряда полиномов Чебышёва в виде

$$f(x) = \sum_{(k=0)}^{\infty} a_k \cdot T_{k(x)} = \frac{1}{2} \cdot a_0 + a_1 \cdot T_{1(x)} + a_2 \cdot T_{2(x)} + \dots,$$

где сейчас и в дальнейшем обозначение $\sum_{(k=0)}^{\infty}$ указывает, что при суммировании первое слагаемое следует брать в виде $\frac{1}{2} a_0$ а не в виде a_0 . Коэффициенты a_n разложения функции по полиномам Чебышева определяются формулой

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(\cos(t)) \cos(nt) dt.$$

Рассмотрим пример разложений функций по полиномам Чебышева. Разложение $\ln(1+x)$ имеет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{(k=0)}^{\infty} a_k \cdot T_k(x),$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln(1+x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \ln(1+\cos(t)) \cos(kt) dt.$$

Справедливы формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x) T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\pi \cdot \ln(2)$$

и

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|s-x| T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{k} \cdot T_k(s).$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{k} \cdot T_k(-1) = -\frac{\pi}{k} \cdot \cos(\pi k) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{k}$$

$$a_0 = -2 \cdot \ln(2),$$

$$a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и

$$\ln(1+x) = -\ln(2) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) T_k(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

Рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения второго порядка,

$$a(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b(x) \cdot \frac{dy}{dx} + c(x) \cdot y = g(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

с использованием рядов, выраженных через полиномы Чебышева.

Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ являются полиномами от x . В случае, когда они представляют собой квадратные трехчлены и линейные функции, уравнение (2) включает в себя многие известные дифференциальные уравнения, связанные со специальными функциями математической физики, такими как гипергеометрические функции, функции Бесселя, функции Эйри и другие. Функция $g(x)$ в правой части уравнения является любой функцией, которая имеет сходящееся разложение в терминах полиномов Чебышева. Линейная замена переменной может быть использована для преобразования задачи на произвольном конечном интервале $a \leq x \leq b$ в стандартный интервал $-1 \leq x \leq 1$.

Мы будем рассматривать те дифференциальные уравнения, которые могут быть решены в равномерно сходящихся рядах. Опишем метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) посредством рядов по полиномам Чебышёва. Отметим, что конечные суммы таких рядов могут быть использованы для аппроксимации таких решений рядов.

Основная идея решения уравнения (1) заключается в представлении этого решения в виде ряда по известным базисным функциям, в нашем случае – по полиномам Чебышёва. Применение именно этих полиномов обусловлено их высокими интерполяционными свойствами.

Решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot T_k(x) = \left(\frac{1}{2} \right) a_0 + a_1 \cdot T_1(x) + a_2 \cdot T_2(x) + \dots$$

Также будем считать, что правая часть уравнения (1) разложима в ряд по полиномам Чебышёва

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot T_k(x).$$

Производные от $y(x)$ порядка $r = 0, 1, 2, \dots$ задаются формулами:

$$y^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(r)} \cdot T_k(x).$$

Затем, применение конкретных коэффициентов уравнения (1), а также рекуррентных соотношений позволяет найти соотношения между коэффициентами ряда, в который разложено решение и найти их.

Чаще всего приближение непрерывных функций ограничивается определенным фиксированным числом n ряда Чебышёва, за счёт отбрасывания компонент с такими $T_k(x)$, $k > n$, величина которых мала. В отличие от приближений, полученных с помощью других степенных рядов, приближение с помощью многочленов Чебышёва минимизирует число членов, необходимых для приближения функции многочленами с заданной точностью. С этим связано и то свойство, что приближение, основанное на ряде Чебышёва, оказывается довольно близким к наилучшему равномерному приближению (среди многочленов одинаковой степени), но при этом его проще вычислить. Кроме того, оно позволяет избавиться от эффекта Гиббса при разумном выборе точек интерполяции.

Заключение

В статье рассмотрены полиномы Чебышёва первого и второго рода, их свойства, рекуррентные соотношения и производящие функции. Показано, как функции одной переменной можно разложить в ряды по полиномам Чебышёва, включая примеры приближённых разложений. Также была изложена методика решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами с использованием разложений по полиномам Чебышёва.

Литература

1. *Васильев Н. Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения / Н. Васильев, А. Зеленинский // Квант. – 1982. – № 1. – С. 12–19.*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: МЕТОД ЭЙЛЕРА — МАРУЯМЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

А. В. Кузнецов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются прикладные аспекты решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с использованием численных методов. Основное внимание уделено методу Эйлера — Маруямы, который является стохастическим аналогом классического метода Эйлера. Приводится построение метода, его обоснование и демонстрация применения для модели геометрического броуновского движения, широко используемой в финансовой математике для описания динамики цен активов.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, винеровский процесс, метод Эйлера — Маруямы, численное решение, геометрическое броуновское движение.

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) являются мощным инструментом для математического моделирования систем, подверженных случайным воздействиям. В отличие от детерминированных моделей, СДУ позволяют учитывать внутренние флуктуации и внешние шумы, что делает их незаменимыми в таких областях, как физика [1], биология [2], и, особенно, в финансовой математике [3].

Одной из фундаментальных моделей в финансах является модель геометрического броуновского движения, лежащая в основе знаменитой модели Блэка — Шоулза для оценки опционов [4]. Эта модель описывается линейным СДУ вида:

$$dS(t) = \mu S(t) + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0,$$

где $S(t)$ — цена актива в момент времени t , μ — средняя доходность (дрейф), σ — волатильность, а $W(t)$ — стандартный винеровский процесс (броуновское движение).

Аналитическое решение этого уравнения известно и выражается формулой:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right).$$

Однако для многих нелинейных или многомерных СДУ аналитические решения недоступны, что делает численные методы основным инструментом их исследования.

Цель данной работы — проиллюстрировать применение метода Эйлера — Маруямы, одного из простейших и наиболее популярных численных методов решения СДУ, к модели геометрического броуновского движения.

Винеровский процесс

В основе большинства СДУ лежит винеровский процесс $W(t)$, который можно определить следующими свойствами [1, 5]:

1. $W(t) = 0$ почти наверное
2. $W(t)$ имеет непрерывные траектории
3. $W(t)$ имеет независимые приращения

4. Приращения $W(t) - W(s)$ при $t > s$ распределены нормально с нулевым средним и дисперсией $t - s$: $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Формально винеровский процесс можно представить как интеграл от белого шума $\xi(t)$:

$$W(t) = \int_0^t \xi(s) ds$$

хотя в строгом смысле белый шум является обобщенной производной винеровского процесса. Необходимо использовать исчисление Ито, в котором ключевую роль играет следующее правило [5]:

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Это правило, на первый взгляд противоречащее классическому анализу, является следствием конечной квадратической вариации винеровского процесса.

Стохастические дифференциальные уравнения и исчисление Ито

Рассмотрим СДУ в общей форме Ито:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),$$

где $a(t, x)$ — коэффициент сноса (дрейфа), $b(t, x)$ — коэффициент диффузии.

Из-за немонотонности и неограниченной вариации траекторий винеровского процесса, классическое исчисление неприменимо. Необходимо использовать исчисление Ито, в котором ключевую роль играет следующее правило [5]:

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Данное правило является формальной записью результата вычисления квадратической вариации винеровского процесса, которая равна $[W, W_t] = t$. Оно показывает, что дифференциал $dW(t)$ имеет порядок \sqrt{dt} , что и обуславливает отличие исчисления Ито от классического.

Стохастические дифференциальные уравнения в форме Ито и Стратоновича

Важно отметить, что помимо формы Ито, существует альтернативное представление СДУ — форма Стратоновича. Уравнение в форме Стратоновича:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t)) \circ dW(t),$$

где интеграл от стохастического члена интерпретируется как предел сумм в средней точке.

Преимущество формы Стратоновича заключается в том, что для нее действуют классические правила дифференцирования, как в детерминированном анализе. Однако в приложениях чаще используется форма Ито, поскольку она обеспечивает марковское свойство решений и упрощает вычисление математических ожиданий.

Переход между формами Ито и Стратоновича осуществляется с помощью поправки:

$$a_{\text{Ито}} = a_{\text{Стратонович}} - \left(\frac{1}{2} b \frac{\partial b}{\partial x} \right).$$

Метод Эйлера — Маруямы

Пусть дано СДУ:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0.$$

Для его численного решения на интервале $[0, T]$ введем равномерную сетку с шагом, $h = \Delta t = T/N$, где N — число шагов. Обозначим $t_n = nh$, $X_n \approx X(t_n)$.

Метод Эйлера — Маруямы имеет вид [6]:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)h + b(t_n, X_n)\Delta W_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ — приращение винеровского процесса на n -м шаге. В силу свойств винеровского процесса, ΔW_n — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону: $\Delta W_n \sim N(0, h)$. Таким образом, ΔW_n можно моделировать как, $\sqrt{h}Z_n$, где $Z_n \sim N(0, 1)$.

Метод Эйлера — Маруямы имеет сильный порядок сходимости 0.5 и слабый порядок сходимости 1.0 [6]. Сильная сходимость характеризует среднюю ошибку отдельной траектории, а слабая — ошибку в распределении. Это означает, что для достижения приемлемой точности может потребоваться небольшой шаг дискретизации, особенно в задачах с высокой волатильностью. Несмотря на невысокий порядок сильной сходимости, метод широко применяется на практике благодаря своей простоте и устойчивости

Повысить точность моделирования позволяет метод Милштейна, который учитывает вторые производные коэффициента диффузии. Его разностная схема для СДУ в форме Ито имеет вид:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)h + b(t_n, X_n)\Delta W_n + 0.5 \cdot b(t_n, X_n) \cdot \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right) (t_n, X_n) \cdot [(\Delta W_n)^2 - h].$$

Данный метод имеет сильный порядок сходимости 1.0, что делает его более точным, однако он требует вычисления производной и несколько сложнее в реализации.

Модель геометрического броуновского движения

Рассмотрим модель динамики цены актива $S(t)$:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0.$$

Применим к ней метод Эйлера — Маруямы. В данном случае $a(t, S) = \mu S$, $b(t, S) = \sigma S$. Разностная схема принимает вид:

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n h + \sigma S_n \Delta W_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Алгоритм решения

Численное решение модели геометрического броуновского движения методом Эйлера — Маруямы включает следующие этапы:

1. Задание параметров: S_0, μ, σ, T, N .
2. Вычисление шага дискретизации: $h = T/N$.
3. Инициализация массива цен: $S[0] = S_0$.
4. Для каждого временного шага:
 - Генерация случайной величины $Z \sim N(0, 1)$.
 - Вычисление приращения винеровского процесса: $\Delta W = \sqrt{h} \cdot Z$.
 - Обновление цены актива по схеме Эйлера — Маруямы.

Заключение

В работе продемонстрирована эффективность метода Эйлера — Маруямы для численного решения стохастических дифференциальных уравнений на примере фундаментальной модели финансовой математики — геометрического броуновского движения. Несмотря на невысокий порядок сильной сходимости, метод остается одним из наиболее популярных инструментов в прикладных исследованиях. Это объясняется его простотой, легкостью реали-

зации и понимания, что делает его идеальным для начального изучения и моделирования стохастических систем.

Ключевое преимущество метода Эйлера — Маруямы проявляется в задачах, требующих массивных вычислений, таких как методы Монте-Карло для оценки финансовых производных инструментов. В таких случаях, когда необходимо быстро сгенерировать огромное количество траекторий для получения статистически надежных результатов, вычислительная эффективность и простота метода оказываются важнее высокой точности каждой отдельной реализации.

Для задач, требующих большей точности при моделировании единичных траекторий, могут быть использованы более сложные методы, такие как метод Милштейна или методы Рунге — Кутты для СДУ.

Проведенное исследование подчеркивает важность численных методов как моста между сложными аналитическими моделями, описывающими реальные процессы со случайностями, и их практическим применением в анализе и прогнозировании. Метод Эйлера — Маруямы, являясь таким «рабочим солдатом» стохастического моделирования, наглядно демонстрирует этот принцип.

Литература

1. Оксендал Б. Стохастические дифференциальные уравнения: Введение с приложениями. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 407 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К. : Наук. думка, 1968. – 354 с.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. – М. : ФАЗИС, 1998. – 512 с.
4. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, № 3. – P. 637–654.
5. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. – 2nd ed. – New York : Springer, 1991. – 470 p.
6. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. – Berlin : Springer, 1992. – 632 p.

ОПТИМАЛЬНАЯ ПОЛНАЯ ПАРА МАТРИЧНЫХ КОРНЕЙ КВАДРАТИЧНОГО МАТРИЧНОГО ПУЧКА

В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными матричными коэффициентами. Характеристической функцией такого уравнения называют многочлен второго порядка с матричными коэффициентами, а его матричные решения — корнями. Пару корней называют *полной*, если их разность является обратимой матрицей. Известно, что общее решение дифференциального уравнения выражается через матричные экспоненты от любых двух корней, образующих полную пару. Обсуждается задача выбора полной пары корней, приводящая к минимальным ошибкам округления.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными матричными коэффициентами, матричная экспонента, корень матричного пучка, полная пара матричных корней, жорданова цепь.

Введение

Настоящий доклад подготовлен на основе статьи [16].

Характеристической функцией дифференциального уравнения второго порядка

$$x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = f(t), \quad (1)$$

является *матричный многочлен* или *пучок*

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \quad \lambda \in C. \quad (2)$$

Матричное решение уравнения

$$X^2 + BX + C = 0$$

называют (*матричным*) *корнем* пучка. Говорят, что два корня X и Z образуют *полную пару*, если матрица $X - Z$ обратима. Имея полную пару, решение уравнения (1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= u, \\ x'(0) &= v \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$x(t) = U'(t)u + U(t)(u + Bv) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds,$$

где

$$\begin{aligned} U(t) &= (e^{Xt} - e^{Zt})(X - Z)^{-1}, \\ U'(t) &= (Xe^{Xt} - Ze^{Zt})(X - Z)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к нахождению двух матричных экспонент e^{Xt} и e^{Zt} . Эта идея впервые была сформулирована в [2] и в дальнейшем обсуждалась многими авторами, см., например, [3–9, 17–20].

Мы ограничиваемся рассмотрением матриц B и C небольшого размера (около 10×10 или чуть больше). Только в этом случае представление матричной экспоненты в виде формулы, зависящей от переменной времени, является не слишком громоздким и может эффективно использоваться. В то же время, множество всех пар корней X и Z может быть посчитано за разумное время примерно для тех же размеров B и C . Оказывается, не все пары X и Z рав-

ноценны: некоторые матричные операции, которые приходится выполнять для вычислений по формулам (3), могут оказаться плохо обусловленными; например, число обусловленности $\kappa(X - Z) = \|X - Z\| \cdot \|(X - Z)\|^{-1}$ может оказаться большим, что приведет к большим ошибкам округления при вычислениях по формулам (3).

Работ, посвященных приближенному нахождению корней пучков много, см., например, [1, 10, 12–15, 21–22]. Задача о выборе оптимальной пары рассматривалась в работе [16].

Теорема 1 (достаточное условие полноты, [4, 11]). *Пусть X и Z — произвольная пара корней пучка (2). Если спектры $\sigma(X)$ и $\sigma(Z)$ не пересекаются, то корни X и Z образуют полную пару.*

1. Жордановы цепи

Рассмотрим матричный пучок (2). Блочную матрицу

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}$$

называют присоединенной к пучку (2).

Напомним, что набор векторов h_0, h_1, \dots, h_k ($h_0 \neq 0$) называют *жордановой цепью длины $k + 1$* для матрицы D , соответствующей собственному значению $\lambda_0 \in C$, если выполняются равенства

$$Dh_0 = \lambda h_0,$$

$$Dh_1 = \lambda h_1 + h_0,$$

.....

$$Dh_k = \lambda h_k + h_{k-1}.$$

Говорят, что жорданова цепь *максимальна*, если ее нельзя расширить до большей.

Набор векторов x_0, x_1, \dots, x_k ($x_0 \neq 0$) называют *жордановой цепью длины $k + 1$* для пучка (2), соответствующей $\lambda_0 \in C$, если выполняются равенства

$$L(\lambda_0)x_0 = 0,$$

$$L(\lambda_0)x_1 + (2\lambda_0 I + B)x_0 = 0,$$

$$L(\lambda_0)x_0 + (2\lambda_0 I + B)x_1 + x_0 = 0,$$

.....

$$L(\lambda_0)x_k + (2\lambda_0 I + B)x_{k-1} + x_{k-2} = 0.$$

Предложение 2 [4]. Всякая жорданова цепь x_0, x_1, \dots, x_k ($x_0 \neq 0$) корня X одновременно является жордановой цепью пучка (2), соответствующей тому же λ_0 .

2. Нахождение матричных корней

Обозначим через $span D$ линейную оболочку столбцов матрицы D .

Теорема 3 [4, 11]. *Матрица X является корнем пучка (2) тогда и только тогда, когда подпространство $M = span \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$ инвариантно относительно присоединенной матрицы C_1 .*

Предложение 4. *Подпространство M инвариантно относительно матрицы D тогда и только тогда, когда M является линейной оболочкой нескольких жордановых цепей матрицы D .*

Теорема 3 позволяет предложить алгоритм нахождения корня. Сначала вычислим жорданову форму присоединенной матрицы

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}.$$

Берем несколько жордановых цепочек так, чтобы общее количество векторов было равно n . Запишем эти векторы в виде столбцов блочной матрицы (с блоками X_1 и X_2 размеров $n \times n$)

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Умножим эту блочную матрицу справа на X_1^{-1} (предполагается, что X_1^{-1} существует):

$$\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 X_1^{-1} \\ X_2 X_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

По теореме 3 получится матричный корень

$$X = X_2 X_1^{-1}.$$

3. Нахождение полных пар матричных корней

Теорема 5. Матрицы X и Z образуют полную пару корней пучка (2) тогда и только тогда, когда подпространства $M_1 = \text{span} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$ и $M_2 = \text{span} \begin{pmatrix} I \\ Z \end{pmatrix}$ инвариантны относительно присоединенной матрицы C_1 и порождают разложение арифметического комплексного пространства C^{2n} в прямую сумму $C^{2n} = M_1 \oplus M_2$.

Предложение 6. Пусть $D \in C^{2n \times 2n}$ — произвольная матрица, а $M_1, M_2 \subseteq C^{2n}$ — два подпространства.

Если подпространства M_1 и M_2 инвариантны относительно присоединенной матрицы C_1 и образуют разложение C^{2n} в прямую сумму $C^{2n} = M_1 \oplus M_2$, то существует жорданово представление матрицы C_1 , каждая жорданова цепочка которого содержит либо в M_1 , либо в M_2 .

Обратно, если существует жорданова представление матрицы C_1 , каждая жорданова цепочка которого содержит либо в M_1 , либо в M_2 , то подпространства M_1 и M_2 инвариантны относительно C_1 и образуют разложение C^{2n} в прямую сумму $C^{2n} = M_1 \oplus M_2$.

Теоремы 3 и 5 вместе с предложениями 4 и 6 позволяют предложить алгоритм нахождения всех полных пар. Вначале берем жорданово разложение присоединенной матрицы C_1 , разбиваем множество его жордановых цепочек на две части так, чтобы число векторов в каждой части равнялось n , определяем M_1 и M_2 как линейные оболочки этих частей. Затем с помощью теоремы 3 конструируем корни X и Z , соответствующие этим подпространствам. По теореме 5 получится полная пара. Перебирая всевозможные разбиения всех жордановых цепочек на две части, мы получим все полные пары матричных корней X и Z . Рекомендуется помещать жордановы цепочки, соответствующие одному и тому же собственному значению (а также очень близким собственным значениям), в одну часть.

Благодаря ошибкам округления, в практических вычислениях кратные собственные значения не появляются. В этой ситуации возникает C_{2n}^n пар полных корней. Перебрать все полные пары удается только для небольших n ; например, $C_{20}^{10} = 184756$, $C_{24}^{12} = 2704156$.

Мы перебираем много пар полных корней, поскольку некоторые из них оказываются неудобными. Например, формула (3) использует умножение на матрицу, которая может оказаться плохо обусловленной, т. е. *число обусловленности*

$$\kappa(X - Z) = \|X - Z\| \cdot \|(X - Z)^{-1}\|$$

может оказаться большим. В общем случае большими могут оказаться также числа обусловленности

$$\kappa(X_1), \kappa(Z_1), \kappa(X), \kappa(Z), \kappa(X - Z),$$

участвующие в промежуточных вычислениях. Наибольшее из этих чисел мы обозначаем через κ_{\max} . Мы рекомендуем использовать ту полную пару, для которой число κ_{\max} является наименьшим. Численные эксперименты показывают, что различие между κ_{\max} для различных пар может доходить до 10^{12} .

Литература

1. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. Ортогональные методы / Х. Д. Икрамов. – М. : Наука, 1984. – 192 с.
2. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // Докл. АН СССР. – Т. 77, № 1. – С. 11–14.
3. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М. В. Келдыш // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26, № 4. – 15–41.
4. Крейн М. Г. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов / М. Г. Крейн, Г. К. Лангер // Тр. межд. симп. по прим. теории функций в мех. спл. среды. – М. : Наука, 1965. – Т. 2. – С. 283–322.
5. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. – Кишинев : Штиинца, 1986. – 260 с.
6. Перов А. И. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах / А. И. Перов, И. Д. Коструб // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. – Т. 491, № 1. – С. 73–77.
7. Перов А. И. О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах : учебное пособие / А. И. Перов, И. Д. Коструб. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. – 56 с.
8. Шкаликов А. А. Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений / А. А. Шкаликов // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – Т. 177, № 1. – С. 96–118.
9. Шкаликов А. А. Компактные возмущения сильно демпфированных пучков операторов / А. А. Шкаликов, В. Т. Плиев // Математические заметки. – 1989. – Т. 45, № 2. – С. 118–128.
10. Davis G. J. Numerical solution of a quadratic matrix equation / G. J. Davis // SIAM J. Sci. Statist. Comput. – 1981. – Vol. 2, no. 2. – P. 164–175.
11. Gohberg I. Matrix polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – New York-London : Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1982. – xiv+409 p.
12. Guo C.-H. Detecting and solving hyperbolic quadratic eigenvalue problems / C.-H. Guo, N. J. Higham, F. Tisseur // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008/09. – Vol. 30, no. 4. – P. 1593–1613.
13. Higham N. J. Stable iterations for the matrix square root / N. J. Higham // Numer. Algorithms. – 1997. – Vol. 15, no. 2. – P. 227–242.
14. Higham N. J. Numerical analysis of a quadratic matrix equation / N. J. Higham, H.M. Kim // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – Vol. 20, no. 4. – P. 499–519.
15. Higham N. J. Solving a quadratic matrix equation by Newton's method with exact line searches / N. J. Higham, H.-M. Kim // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2001. – Vol. 23, no. 2. – P. 303–316 (electronic).
16. Kurbatov V. G. A complete pair of solvents of a quadratic matrix pencil / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Proyecciones Journal of Mathematics. – 2025. – Vol. 44, no. 2. – P. 365–389.
17. Langer H. Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum / H. Langer // J. Math. Mech. – 1967/68. – Vol. 17. – P. 685–705.
18. Langer H. Factorization of operator pencils / H. Langer // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1976. – Vol. 38, no. 1-2. – P. 83–96.
19. Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: The instability index formula / A. A. Shkalikov // Recent Developments in Operator Theory and Its Applications / Ed. by I. Gohberg, P. Lancaster, P. N. Shivakumar. – Basel : Birkhäuser, 1996. – P. 358–385.

20. *Shkalikov A. A. Factorization of elliptic pencils and the Mandelstam hypothesis / A. A. Shkalikov // Contributions to operator theory in spaces with an indefinite metric (Vienna, 1995). – Basel : Birkhäuser, 1998. – Vol. 106 of Oper. Theory Adv. Appl. – P. 355–387.*
21. *Tisseur F. The quadratic eigenvalue problem / F. Tisseur, K. Meerbergen // SIAM Rev. – 2001. – Vol. 43, no. 2. – P. 235–286.*
22. *Tsai J. S. H. A computer-aided method for solvents and spectral factors of matrix polynomials / J. S. H. Tsai, C. M. Chen, L. S. Shieh // Applied mathematics and computation. – 1992. – Vol. 47, no. 2-3. – P. 211–235.*

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

И. С. Левенец

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В работе рассматриваются современные численные методы решения дробных дифференциальных уравнений и их приложения в математическом моделировании биологических процессов. Представлен анализ методов конечных разностей высокого порядка точности и метода Рунге – Кутты для дробных производных. Исследована сходимость и устойчивость предложенных схем. Приведены примеры применения разработанных методов для моделирования динамики популяций с учетом наследственных эффектов и запаздывания. Численные эксперименты демонстрируют эффективность и точность предложенных подходов.

Ключевые слова: дробные дифференциальные уравнения, численные методы, производная Капуто, математическая биология, динамика популяций, метод Рунге – Кутты четвертого порядка, устойчивость численных схем, модель хищник – жертва, эпидемиологические модели, дифференциальные уравнения с запаздыванием, математическое моделирование, сходимость методов, эффекты памяти, логистическое уравнение, модель SIR.

Введение

Теория дифференциальных уравнений является одним из фундаментальных разделов современной математики, имеющим широкие приложения в естественных науках, технике и экономике. За последние два десятилетия особый интерес исследователей привлекли дробные дифференциальные уравнения (ДДУ), которые предоставляют более гибкий математический аппарат для описания процессов с памятью и наследственными свойствами [2].

Дробное исчисление расширяет классическое понятие производной и интеграла на нецелые порядки, что позволяет более точно моделировать явления в различных областях: от реологии вязкоупругих материалов до распространения эпидемий [2, 3]. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, ДДУ учитывают всю предысторию системы, что делает их особенно подходящими для описания биологических процессов [4, 5].

Математическая постановка задачи. Рассмотрим дробную производную Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $f(t)$.

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (1)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Производная Капуто обладает важным свойством: для постоянной функции ${}^C D_t^\alpha C = 0$, что согласуется с физической интерпретацией и упрощает формулировку начальных условий [3].

Рассмотрим задачу Коши для дробного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (2)$$

где $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – достаточно гладкая функция, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ [9].

Теорема 1. Пусть функция $f(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой L в области $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда задача Коши имеет единственное решение $y \in C[0, T]$.

Численные методы. Введем равномерную сетку $\omega_h = \{t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N; Nh = T\}$ на отрезке $[0, T]$. Дискретизация дробной производной Капуто основана на интегральном представлении:

$${}^C D_{t_n}^\alpha y(t_n) \approx \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{(\alpha)} |y(t_{n-j}) - y(t_{n-j-1})|, \quad (3)$$

где коэффициенты $b_j^{(\alpha)} = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$ [9, 11].

Теорема 2. Схема Эйлера для ДДУ имеет порядок точности $O(h)$ при $\alpha \in (0,1)$.

Модифицированный метод Рунге — Кутты. Для повышения порядка точности предлагаются модифицированная схема Рунге — Кутты четвертого порядка для дробных уравнений [12].

$$k_1 \text{amp} = f(t_n, y_n), \quad (4)$$

$$k_2 \text{amp} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} k_1\right), \quad (5)$$

$$k_3 \text{amp} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h^\alpha}{2\tilde{A}(\alpha+1)} k_2\right), \quad (6)$$

$$k_4 \text{amp} = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} k_3\right), \quad (7)$$

$$y_{n+1} \text{amp} = y_n + \frac{h^\alpha}{6\Gamma(\alpha+1)} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (8)$$

Теорема 3. При достаточной гладкости правой части модифицированная схема Рунге — Кутты имеет порядок точности $O(h^4)$ для α дробных уравнений [9, 10].

Анализ устойчивости. Исследуем устойчивость разностной схемы для линейного тестового уравнения ${}^C D_t^\alpha y = \lambda y$, $\lambda \in C$ [9].

Теорема 4. Модифицированная схема Рунге — Кутты безусловно устойчива для при $\alpha \in (0,1)$.

Приложения к математической биологии

Модуль популяционной динамики с памятью. Рассмотрим модель логистического роста популяции с дробной производной [4, 5].

$${}^C D_t^\alpha N(t) = \tau N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), N(0) = N_0, \quad (9)$$

где $N(t)$ — численность популяции в момент времени t , τ — коэффициент воспроизводства, K — ёмкость среды, $\alpha \in (0,1)$ — порядок дробной производной, характеризующий эффект памяти [7].

Модуль хищник-жертва с запаздыванием. Обобщим классическую модель Лотки — Вольтерра, включив дробные производные и запаздывание [4, 6]:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = ax(t) - bx(t)y(t-\tau) \\ {}^C D_t^\beta y(t) = -cy(t) + dx(t-\tau)y(t) \end{cases}, \quad (10)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — численности жертвы и хищника соответственно, τ — время запаздывания, $\alpha, \beta \in (0,1)$ — порядки дробных производных [6].

Анализ устойчивости. Исследование положений равновесия системы проводится методом линеаризации с использованием характеристического квазиполинома [4, 6].

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta} + p_1(\tau)\lambda^\beta e^{-\lambda\tau} + p_3(\tau)e^{-2\lambda\tau}. \quad (11)$$

Теорема 5. Положение равновесия (x^*, y^*) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ имеют отрицательные вещественные части [6].

Модель распространения эпидемии. Рассмотрим дробную модель SIR (восприимчивые-инфицированные-выздоровевшие).

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = -\beta S(t)I(t) \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = \gamma I(t) \end{cases} \quad (12)$$

где $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ — доли восприимчивых, инфицированных и выздоровевших соответственно, β — коэффициент контакта, γ — скорость выздоровления.

Результаты численных экспериментов

Базовое репродуктивное число

$$R_0^{(\alpha)} = \frac{\beta S_0}{\gamma} \cdot \frac{\tilde{A}(1+\alpha)}{\tilde{A}(1+2\alpha)}. \quad (13)$$

Параметр α — порядок дробной производной Капуто, β — коэффициент передачи инфекции, S_0 — начальная численность восприимчивой популяции, γ — коэффициент выздоровления. Γ — гамма-функция, которая обобщает факториал на нецелые значения. Эта формула связана с формулой (2) из статьи, определяющей базовое репродуктивное число в классической эпидемиологии.

Численные эксперименты. Рассмотрим тестовую задачу.

$${}^C D_t^\alpha y(t) = \Gamma(3)\Gamma(3-\alpha)^{-1}t^{2-\alpha} - y(t), y(0) = 0. \quad (14)$$

Здесь ${}^C D_t^\alpha$ обозначает дробную производную Капуто порядка, которая обобщает классическую производную на нецелые порядки. Эта форма уравнения применяется в модификации классического SIR-уравнения из формулы (3) для учета эффектов памяти в процессе распространения инфекции.

Точное решение:

$$y(t) = t^2 - t^{2-\alpha} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}. \quad (15)$$

В табл. 1 приведены значения максимальной ошибки $E_{\max} = \max |y(t_n) - y_n|$ для различных значений шага сетки h и порядка $\alpha = 0.5$.

Таблица 1

Значение максимальной ошибки

Наименование	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Порядок
Метод Эйлера	2.45×10^{-2}	1.28×10^{-2}	6.51×10^{-3}	0.98
Рунге — Кутты(RK4)	3.21×10^{-4}	2.08×10^{-5}	1.34×10^{-6}	3.96

Модель популяционной динамики. Решим задачу с параметрами $O(N^2)$.

Сравнение с классической моделью. При $\alpha = 1$ получается стандартное логистическое уравнение с решением:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\tau t}}. \quad (16)$$

Модель хищник-жертва. Численное моделирование системы с параметрами: $a = 1.0$, $b = 0.5$, $c = 0.75$, $d = 0.25$, $\alpha = \beta = 0.9$, $\tau = 0.5$.

Фазовый портрет. Численные расчеты показывают, что при малых значениях запаздывания система стремится к устойчивому равновесию. При увеличении τ возникает бифуркация Хопфа и появляются устойчивые периодические решения (предельные циклы).

Влияние порядка производной. При уменьшении α и β амплитуда колебаний снижается, что демонстрирует стабилизирующее влияние эффектов памяти на динамику системы.

Сравнительный анализ методов. Результаты сравнения вычислительной эффективности рассмотренных методов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнительные характеристики численных методов

Характеристика	Эйлер	RK4	Адамс — Башфорт
Порядок точности	2.45×10^{-2}	1.28×10^{-2}	6.51×10^{-3}
Время расчета	3.21×10^{-4}	2.08×10^{-5}	1.34×10^{-6}
Объем памяти	$O(N)$	$O(N)$	$O(N^2)$
Устойчивость	Условная	Безусловная	Условная

Заключение

Теоретические аспекты. Разработанные численные методы позволяют эффективно решать широкий класс дробных дифференциальных уравнений, возникающих в математической биологии. Доказанные теоремы о сходимости и устойчивости обеспечивают надежную теоретическую основу для применения методов.

Ключевым преимуществом дробных моделей является естественное включение эффектов памяти и наследственности, что особенно важно для биологических систем. Параметр выступает как мера влияния предыстории системы и может определяться из экспериментальных данных.

Практические приложения. Численные эксперименты демонстрируют применимость разработанных методов к реальным задачам популяционной динамики и эпидемиологии. Дробные модели позволяют более точно описывать наблюдаемые явления, такие как:

1. Замедленный рост популяций в условиях ограниченных ресурсов.
2. Затухающие колебания в системах хищник-жертва.
3. Субэкспоненциальное распространение эпидемий.

Сравнение с существующими подходами. По сравнению с классическими ОДУ-моделями, дробные дифференциальные уравнения: учитывают эффекты памяти и наследственность, имеют более гибкое описание динамики, имеют лучшее соответствие экспериментальным данным.

Таким образом, разработаны и исследованы численные методы высокого порядка точности для решения дробных дифференциальных уравнений с приложениями к задачам математической биологии. Основные результаты включают:

1. Построена модифицированная схема Рунге — Кутты четвертого порядка для дробных производных Капуто, доказаны теоремы о сходимости и устойчивости метода.
2. Разработан алгоритм численного решения систем дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием, реализованный в виде программного комплекса.
3. Проведено математическое моделирование биологических систем: популяционной динамики, взаимодействия хищник-жертва и распространения эпидемий. Показано, что дробные модели обеспечивают более адекватное описание наблюдаемых явлений.
4. Численные эксперименты подтвердили теоретические оценки порядка точности и продемонстрировали эффективность предложенных методов.

Литература

1. Азбелев Н. В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2009. – № 1. – С. 3–23.

2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – Москва : ЛЕНАНД, 2021. – 205 с
3. Тимошин С. И. Дифференциальные уравнения и их приложения : пособие для студентов технических вузов / С. И. Тимошин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2005. – 107 с.
4. Guglielmi N. A fast and memoryless numerical method for solving fractional differential equations / N. Guglielmi, E. Hairer // arXiv. – 2025. – arXiv:2506.04188.
5. Bouchenak A. Generalization of the Nonlinear Bernoulli Conformable Fractional Differential Equation / A. Bouchenak, I. M. Batiha, I. H. Jebril // WSEAS Transactions on Mathematics. – 2025. – Vol. 24. – P. 168–178. – DOI: 10.37394/23206.2025.24.17
6. Agarwal P. Fractional Differential Equations: Theoretical Aspects and Applications / P. Agarwal [et al.]. – Amsterdam : Elsevier, 2024.
7. Glass D. S. Nonlinear delay differential equations and their application to modeling biological network motifs / D. S. Glass, X. Jin, I. H. Riedel-Kruse // Nature Communications. – 2021. – Vol. 12. – P. 1788. – DOI: 10.1038/s41467-021-21700-8.
8. Численное моделирование в биологии с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием / J. Arino [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 125. – P. 183–199.
9. Recent Advances in Numerical Methods for Differential Equations // Computational Mathematics. – 2025. – URL: <https://ojs.wiserpub.com/index.php/CM/announcement/view/496> (дата обращения: 04.11.2025)
10. Storey B. Numerical Methods for Differential Equations / B. Storey. – Needham : Olin College, 2015. – 45 p.
11. Scherer R., Kalla S. L., Tang Y., Huang J. The Grünwald — Letnikov method for fractional differential equations // Computers & Mathematics with Applications. 2011. Vol. 62. Issue 3. P. 902-917. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.054>
12. Ghoreishi F., Ghaffari R. Fractional Order Runge — Kutta Methods // arXiv preprint. 2022. arXiv:2210.13138. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.13138>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова, А. С. Рябенко, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Изучается краевая задача о стационарной распределении тепла в полу平面 с конечной трещиной, наклонной к границе полу平面 и подходящей одним концом к указанной границе. Задаются условия на температуру на границе полу平面, разницы температур и тепловых потоков при переходе через берега трещины. Задача сводится к обобщенной, что позволяет построить её решение в пространстве обобщенных функций. Решение исходной задачи получено в интегральном виде с использованием функций Макдональда — Бесселя.

Ключевые слова: краевая задача, неоднородная полу平面, материал с трещиной, стационарная теплопроводность, наклонная трещина, температура, тепловой поток, интегральное представление, функция Макдональда — Бесселя, граничные условия, разность температур.

Введение

Рассматривается стационарное уравнение теплопроводности в верхней полу平面 с трещиной конечной длины, наклоненной к границе полу平面 под углом $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Delta u(x) + k \cos \beta \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + k \sin \beta \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{l}_+, \quad (1)$$

где $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$ — верхняя полу平面,

$\overline{l}_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t \cos \alpha, x_2 = t \sin \alpha, t \in (0; |l|)\}$ — интервал, моделирующий трещину,

\overline{l}_+ — отрезок, соответствующий интервалу l_+ ,

β — угол наклона вектора неоднородности материала к положительному направлению оси абсцисс,

Δ — оператор Лапласа,

$u(x)$ — температура в точке материала с координатами $x = (x_1, x_2)$,

$k = \text{const}$, входящая в коэффициент внутренней теплопроводности $k(x_1, x_2) = e^{k(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)}$.

Уравнение (1) дополнено условием на границе полу平面

$$u(x_1, 0) = \tilde{\psi}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2)$$

и условиями на разности температур и тепловых потоков при переходе через берега трещины

$$u(x + 0 \cdot \bar{n}) - u(x - 0 \cdot \bar{n}) = \tilde{q}_0(x), \quad x \in l_+, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x + 0 \cdot \bar{n})}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial u(x - 0 \cdot \bar{n})}{\partial \bar{n}} = -\frac{k}{2}(\sin(\alpha - \beta))(u(x + 0 \cdot \bar{n}) - u(x - 0 \cdot \bar{n})), \quad x \in l_+, \quad (4)$$

где $\bar{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ — вектор нормали к трещине,

$\tilde{\psi}(x_1)$, $\tilde{q}_0(x)$, $\tilde{q}_1(x)$ — известные функции.

Основной результат исследования представлен в теореме.

Теорема. Пусть функции $\tilde{q}_0(x)$, $\tilde{q}_1(x) \in C(l_+)$, т. е. заданы и являются непрерывными на трещине, а функция $\tilde{\psi}(x_1)$ из $C(\mathbb{R})$ и ограничена на \mathbb{R} .

Тогда задача (1)–(4) имеет решение, записываемое равенством

$$u(x) = e^{-\frac{k}{2}(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)} \left(\frac{kx_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}} e^{\frac{k}{2}y_1 \cos \beta} \tilde{\psi}(y_1) dy_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{l_+} \tilde{q}_1(y) e^{\frac{k}{2}(y_1 \cos \beta + y_2 \sin \beta)} \left(K_0\left(\frac{k}{2}|x - y|\right) - K_0\left(\frac{k}{2}|x - \hat{y}|\right) \right) dl_y - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{l_+} \tilde{q}_0(y) e^{\frac{k}{2}(y_1 \cos \beta + y_2 \sin \beta)} \left(\frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}|x - y|\right)}{\partial \bar{n}_x} - \frac{\partial K_0\left(\frac{k}{2}|x - \hat{y}|\right)}{\partial \bar{n}_{1x}} \right) dl_y \right), \quad (5)$$

где K_0 , K_1 — функции Макдональда — Бесселя [1], $\hat{y} = (y_1, -y_2)$.

Для представления (5) выполняются граничные условия (2)–(4).

1. Переход к обобщенному уравнению

Вводя замену переменных $u(x_1, x_2) = e^{-\frac{k}{2}(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)} v(x_1, x_2)$ для упрощения исходной задачи, а затем, для перехода к обобщенному уравнению продолжая исходную функцию и функции $q_0(x)$ и $q_1(x)$ на нижнюю полуплоскость нечетным образом:

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x_2 > 0, \\ -v(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\hat{q}_0(x) = \begin{cases} q_0(x), & x_2 > 0, \\ -q_0(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \quad \hat{q}_1(x) = \begin{cases} q_1(x), & x_2 > 0, \\ -q_1(x_1, -x_2), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (7)$$

получаем задачу

$$\Delta \hat{v}(x) - \frac{k^2}{4} \hat{v}(x) = 0, \quad x \in (\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{l}_+) \cup (\mathbb{R}_-^2 \setminus \bar{l}_-), \quad (8)$$

$$\hat{v}(x + 0 \cdot \bar{n}_2) - \hat{v}(x - 0 \cdot \bar{n}_2) = \hat{q}_0(x), \quad x \in l_+ \cup l_-, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \hat{v}(x + 0 \cdot \bar{n}_2)}{\partial \bar{n}_2} - \frac{\partial \hat{v}(x - 0 \cdot \bar{n}_2)}{\partial \bar{n}_2} = \hat{q}_1(x), \quad x \in l_+ \cup l_-, \quad (10)$$

где $\mathbb{R}_-^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0\}$ — нижняя полуплоскость,

$l_- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t \cos \alpha, x_2 = -t \sin \alpha, t \in (0; |l|)\}$ — интервал, моделирующий трещину в нижней полуплоскости, симметричную относительно оси Ox_1 исходной трещине,

\bar{l}_- — соответствующий l_- отрезок,

$$\bar{n}_2 = \begin{cases} \bar{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha), & x \in l_+, \\ \bar{n}_1 = (-\sin \alpha, -\cos \alpha), & x \in l_-. \end{cases}$$

Обобщенное уравнение в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$, соответствующее задаче (8)–(10) имеет вид

$$\Delta \hat{v}(x) - \frac{k^2}{4} \hat{v}(x) = 2\psi(x_1) \delta'(x_2) + q_1(x) \delta_{l_+}(x) + \frac{\partial(q_0(x) \delta_{l_+}(x))}{\partial \bar{n}} + \\ + \hat{q}_1(x) \delta_{l_-}(x) + \frac{\partial(\hat{q}_0(x) \delta_{l_-}(x))}{\partial \bar{n}_1}, \quad (11)$$

где $\bar{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, $\bar{n}_1 = (-\sin \alpha, -\cos \alpha)$, $\delta(x_2)$ — функция Дирака (см. [2]).

Отметим, что $q(x)\delta_l(x) \in D'(\mathbb{R}^2)$, и для любой $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^2)$ выполнено $(q(x)\delta_l(x), \varphi(x)) = \int_l q(x)\varphi(x)dl$, также $\frac{\partial q(x)\delta_l(x)}{\partial \bar{m}} \in D'(\mathbb{R}^2)$ и для любой $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^2)$ $\left(\frac{\partial q(x)\delta_l(x)}{\partial \bar{m}}, \varphi(x) \right) = - \int_{l_+} q(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \bar{m}} dl$, где $q(x)$ может равняться одной из функций $q_0(x)$, $q_1(x)$, $\hat{q}_0(x)$, $\hat{q}_1(x)$, l — произвольный отрезок в \mathbb{R}^2 .

Для получения (11) к произвольной основной функции $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^2)$ был применен функционал $\Delta \hat{v}(x) - \frac{k^2}{4} \hat{v}(x)$ и использованы правила вычисления обобщенных производных.

2. Построение решения

Формула, задающая решение исходной задачи представлена в теореме.

Для её получения использовалась теорема о представлении решения обобщенного уравнения как свертки фундаментального решения оператора $\Delta - \frac{k^2}{4}$, заданного равенством $-\frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{k}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)$ [3] со слагаемыми правой части уравнения (11), определение и свойства свёртки [4]. Далее показано, что решение обобщенного уравнения является решением исходной задачи в верхней полуплоскости.

Для доказательства выполнения граничных условий используется явное представление решения, свойства функций Макдональда и формула перехода от интеграла по кривой к определенному интегралу.

Заключение

В работе представлено интегральное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности в полуплоскости с разрезом, наклонным к границе полуплоскости.

Литература

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.
3. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимира. – 4-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 288 с.
4. Глушко А. В. Уравнения математической физики: учебник / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2011. – 520 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Д. А. Маслов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Аннотация. Рассматривается один класс слабо нелинейных спектральных задач с малым параметром при нелинейности, который включает в себя задачи на собственные значения, возникающие при расчётах критического усилия продольного сжатия стержня с учётом нелинейностей. Данный класс задач рассмотрен в виде уравнения в банаховом пространстве, где нелинейность задаётся полилинейным оператором. Собственные значения и собственные функции определяются в виде рядов по степеням малого параметра. Получены достаточные условия аналитичности по малому параметру собственных значений и собственных функций. Приведён пример построения приближённого решения для собственного значения.

Ключевые слова: нелинейная спектральная задача, малый параметр, аналитическое решение, банахово пространство.

Постановка задачи

Задачи на собственные значения возникают при расчётах минимального усилия продольного сжатия стержня, приводящего к потере его устойчивости. Учёт в данных задачах нелинейностей, вызванных разными геометрическими и физическими факторами [1–4], приводит к классу нелинейных краевых задач, которые могут быть записаны в виде уравнения со значениями в банаховом пространстве [5]. Пусть пространство E является оснащённым банаховым пространством [6], в котором $\|v\|$ — норма элемента $v \in E$, и также введена порождаемая скалярным произведением $\langle v, v \rangle$ норма $\|v\|_c = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, подчинённая норме пространства E , то есть, существует постоянная $\gamma > 0$, такая что $\|v\|_c \leq \gamma \|v\|$ для любого $v \in E$.

Рассмотрим в E слабо нелинейную задачу на определение собственных значений λ :

$$Au + \lambda Gu + \alpha u = \varepsilon B(H_1 u, H_2 u, H_3 u), \quad (1)$$

где A , H_j — линейные неограниченные операторы, $j = 1, 2, 3$; $B : E \times E \times E \rightarrow E$ — полилинейный ограниченный оператор; параметр $\alpha \neq 0$, ε — малый параметр.

1. Условия аналитичности решения по малому параметру

Решение задачи (1) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$\lambda_m = \lambda_{0,m} + \lambda_{1,m} \varepsilon + \dots + \lambda_{n,m} \varepsilon^n + \dots \quad (2)$$

$$u_m = u_{0,m} + u_{1,m} \varepsilon + \dots + u_{n,m} \varepsilon^n + \dots \quad (3)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} Au_{0,m} + \lambda_{0,m} Gu_{0,m} + \alpha u_{0,m} &= 0, \\ Au_{1,m} + \lambda_{0,m} Gu_{1,m} + \alpha u_{1,m} &= -\lambda_{1,m} Gu_{0,m} + B(H_1 u_{0,m}, H_2 u_{0,m}, H_3 u_{0,m}), \\ Au_{2,m} + \lambda_{0,m} Gu_{2,m} + \alpha u_{2,m} &= -\lambda_{1,m} Gu_{1,m} - \lambda_{2,m} Gu_{0,m} + \\ &+ B(H_1 u_{1,m}, H_2 u_{0,m}, H_3 u_{0,m}) + B(H_1 u_{0,m}, H_2 u_{1,m}, H_3 u_{0,m}) + B(H_1 u_{0,m}, H_2 u_{0,m}, H_3 u_{1,m}), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$Au_{n,m} + \lambda_{0,m} Gu_{n,m} + \alpha u_{n,m} = -\sum_{k=1}^n \lambda_{k,m} Gu_{n-k,m} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k B(H_1 u_{n-1-k}, H_2 u_j, H_3 u_{k-j}) \right), \quad (4)$$

.....

Пусть выполнены следующие условия:

1. A, G, H_j — замкнутые неограниченные операторы с областями определения D_A, D_G, D_j , такими, что $D_A \subset D_G, D_A \subset D_j, j=1,2,3$.

2. Линейная однородная задача

$$Au + \lambda_0 Gu + \alpha u = 0$$

имеет собственные значения $\{\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}, \dots\}$ и соответствующую им систему нормированных «собственных векторов» $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$, $b_m = u_{0,m}, m=1,2,\dots$. Сопряженная к \mathcal{B} система $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \dots\}$ является G -ортогональной.

3. Обратные операторы $(A + \lambda_{0,m} G)^{-1}, m=1,2,\dots$, являются ограниченными.

4. Оператор $A + \lambda_{0,m} G + \alpha I$ непрерывно обратим на пространстве $E \setminus E_m$, где I — тождественный оператор, $m=1,2,\dots$, $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ — набор одномерных подпространств, натянутых на «собственные векторы» $\{b_1, b_2, \dots\}$.

Действуя так же, как и в линейной теории регулярных возмущений [7], последовательно найдем коэффициенты рядов (2), (3):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,m} &= \frac{\langle B(H_1 b_m, H_2 b_m, H_3 b_m), b_m^* \rangle}{\langle G b_m, b_m^* \rangle}, \\ u_{1,m} &= (A + \lambda_{0,m} G + \alpha I)^{-1} \Big|_{E \setminus E_m} [-\lambda_{1,m} G b_m + B(H_1 b_m, H_2 b_m, H_3 b_m)], \\ \lambda_{2,1} &= \frac{1}{\langle G b_m, b_m^* \rangle} \left(\langle B(H_1 u_{1,m}, H_2 b_m, H_3 b_m), b_m^* \rangle + \langle B(H_1 b_m, H_2 u_{1,m}, H_3 b_m), b_m^* \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle B(H_1 b_m, H_2 b_m, H_3 u_{1,m}), b_m^* \rangle \right), \\ u_{2,m} &= (A + \lambda_m G + \alpha I)^{-1} \Big|_{E \setminus E_m} [-\lambda_{1,m} G u_{1,m} - \lambda_{2,m} G b_m + \\ &\quad + B(H_1 u_{1,m}, H_2 b_m, H_3 b_m) + B(H_1 b_m, H_2 u_{1,m}, H_3 b_m) + B(H_1 b_m, H_2 b_m, H_3 u_{1,m})], \\ \lambda_{n,m} &= \frac{1}{\langle G b_m, b_m^* \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \langle B(H_1 u_{n-1-k}, H_2 u_j, H_3 u_{k-j}), b_m^* \rangle \right), \\ u_{n,m} &= (A + \lambda_m G + \alpha I)^{-1} \Big|_{E \setminus E_m} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \langle B(H_1 u_{n-1-k}, H_2 u_j, H_3 u_{k-j}), b_m^* \rangle \right) - \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m} G u_{n-k,m} \right], \\ \end{aligned} \quad (5)$$

.....

Доказано, что условия 1–4 являются достаточными условиями, при которых ряды (2), (3) сходятся не только асимптотически, но и в обычном смысле, представляя тем самым решение задачи (1), аналитическое в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$. Для доказательства использовались методы аналитической теории возмущений, предложенные для нелинейных регулярно возмущённых задач в [8].

2. Пример расчёта приближения для собственного значения

Пусть шарнирно опёртый стержень расположен на упругом основании и вдоль его оси прикладывается усилие сжатия. Ставится задача определения минимального усилия сжатия, при котором происходит потеря устойчивости стержня, то есть минимального положительного собственного значения, соответствующего одной из собственных форм стержня [2]:

$$\begin{aligned} u'''' + \lambda u'' + \alpha u = \varepsilon u^3, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $u(x)$ — нормализованный прогиб стержня, λ характеризует усилие сжатия вдоль оси стержня, $\alpha > 0$ характеризует линейную жёсткость основания, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий нелинейную жёсткость основания.

Задача (6) рассматривается в банаховом пространстве непрерывных функций $C([0,1])$, оснащённом скалярным произведением $\langle v, v \rangle = \int_0^1 uv dx$ [6], и сводится к (1),

$$Au = u''', \quad D_A = \{v(x) \in C^4([0,1]), v(0) = v''(0) = v(1) = v''(1) = 0\},$$

$$Gu = u'', \quad D_G = \{v(x) \in C^2([0,1]), v(0) = v(1) = 0\},$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = I,$$

где I — тождественный оператор. Проверим условия 1–4.

1. Очевидно, что A , G — замкнутые неограниченные операторы, H_j — ограниченные операторы, причём области определения $D_A \subset D_G$, $D_A \subset D_j$, $j = 1, 2, 3$.

2. При $\varepsilon = 0$ линейная задача (6) имеет собственные значения $\lambda_{0,m} = (\pi m)^2 + \frac{\alpha}{(\pi m)^2}$, и нормированные собственные функции $b_m = \sqrt{2} \sin \pi m x$, $m = 1, 2, \dots$, причём с ними совпадают A -сопряжённые функции $b_m^* = b_m$, которые также являются G -ортогональными:

$$(Gb_n^*, b_k^*) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ -(\pi n)^2 \neq 0, & n = k. \end{cases}$$

3. Обратные операторы $(A + \lambda_{0,m} G)^{-1}$, $m = 1, 2, \dots$, являются ограниченными, поскольку задача $(A + \lambda_{0,m} G)y = f$, $m = 1, 2, \dots$, имеет единственное решение, если $\lambda_{0,m} \neq (\pi m)^2$, что верно, поскольку $\lambda_m \neq (\pi m)^2$ при $\alpha \neq 0$.

4. Условие непрерывной обратимости оператора $A + \lambda_{0,m} G + \alpha I$ на пространстве $E \setminus E_m$ соответствует условию

$$\lambda_{0,m} = (\pi m)^2 + \frac{\alpha}{(\pi m)^2} \neq (\pi k)^2 + \frac{\alpha}{(\pi k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, k \neq m,$$

из которого получаем условие для параметра α :

$$\alpha \neq \pi^4 m^2 k^2, \quad k = 1, 2, \dots, k \neq m.$$

Таким образом, все поставленные условия выполнены, следовательно собственные значения и собственные функции задачи (6) аналитичны в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, и можно их построить в виде рядов (2), (3) с коэффициентами (5). Тогда для минимального собственного значения получим следующие коэффициенты рядов (2), (3):

$$\begin{aligned} \lambda_{0,1} &= \pi^2 + \frac{\alpha}{\pi^2}, \quad u_{0,1} = b_1 = \sqrt{2} \sin \pi x, \\ \lambda_{1,1} &= \frac{\langle B(b_1, b_1, b_1), b_1^* \rangle}{\langle Gb_1, b_1^* \rangle} = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^1 (\sin \pi x)^4 dx = -\frac{3}{2\pi^2}, \\ u_{1,1} &= (A + \lambda_{0,1} G + \alpha I)^{-1} \Big|_{E \setminus E_1} \left(-\lambda_{1,1} Gb_1 + B(b_1, b_1, b_1) \right), \end{aligned}$$

где $-\lambda_{1,1} Gb_1 + B(b_1, b_1, b_1) = -\frac{3}{2\pi^2} \sqrt{2} \pi^2 \sin \pi x + 2\sqrt{2} (\sin \pi x)^3 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \pi x + \frac{\sqrt{2}}{2} (3 \sin \pi x - \sin 3\pi x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3\pi x$ и решение на $E \setminus E_1$, то есть $E \setminus \{C \sin \pi x\}$, задачи

$$u_{1,1}^{IV} + \left(\pi^2 + \frac{\alpha}{\pi^2} \right) u_{1,1}'' + \alpha u_{1,1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3\pi x, \quad x \in (0,1),$$

$$u_{1,1}(0) = u_{1,1}''(0) = u_{1,1}(1) = u_{1,1}''(1) = 0,$$

имеет вид:

$$u_{1,1}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{16(9\pi^4 - \alpha)} \sin 3\pi x, \quad x \in (0,1), \quad \alpha \neq 9\pi^4.$$

И, таким образом, зная $u_{1,1}$, получим

$$\begin{aligned} \lambda_{2,1} &= \frac{\langle B(u_{1,1}, b_1, b_1), b_1^* \rangle + \langle B(b_1, u_{1,1}, b_1), b_1^* \rangle + \langle B(b_1, b_1, u_{1,1}), b_1^* \rangle}{\langle Gb_1, b_1^* \rangle} = -\frac{3}{\pi^2} \int_0^1 u_{1,1}(x) b_1^2(x) b_1^*(x) dx = \\ &= \frac{3}{4\pi^2(9\pi^4 - \alpha)} \int_0^1 \sin 3\pi x (\sin \pi x)^3 dx = -\frac{3}{32\pi^2(9\pi^4 - \alpha)}, \quad \alpha \neq 9\pi^4. \end{aligned}$$

В итоге, получено приближение третьего порядка точности по малому параметру ε :

$$\lambda_1 \approx \lambda_{0,1} + \varepsilon \lambda_{1,1} + \varepsilon^2 \lambda_{2,1} = \pi^2 + \frac{\alpha}{\pi^2} - \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{3}{32\pi^2(9\pi^4 - \alpha)} \varepsilon^2, \quad \alpha \neq 9\pi^4.$$

Заключение

Рассмотрен один класс нелинейных спектральных задач с малым параметром при нелинейности, который включает в себя задачи на собственные значения, возникающие при расчётах критического усилия продольного сжатия стержня с учётом нелинейностей. Данный класс задач рассмотрен в виде уравнения в банаховом пространстве, где нелинейность задана полилинейным оператором. Собственные значения и собственные функции определяются в виде рядов по степеням малого параметра. Получены достаточные условия аналитичности по малому параметру собственных значений и собственных функций. Приведён пример построения приближённого решения для собственного значения.

Литература

1. Ерофеев В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. : монография / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н. П. Семерикова; ФИЗМАТЛИТ. – Москва : Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208 с.
2. Пешхоев И. М. О ветвлении равновесий сжатого упругого стержня на нелинейно упругом основании / И. М. Пешхоев, Б. В. Соболь, А. М. Левченков // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – Т. 85, № 4. – С. 461–469.
3. Bassey J. Dynamic buckling of a clamped finite column resting on a non-linear elastic foundation / J. Bassey, A. Ette, C. Joy, A. Osuji // Asian Research Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 14, No. 4. – P. 1–47.
4. Kounadis A. Postbuckling analysis of columns resting on an elastic foundation / A. Kounadis, J. Mallis, A. Sbarounis // Arch Appl Mech. – 2006. – Vol. 75. – P. 395–404.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве: монография / С. Г. Крейн. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ: учебник / В. А. Треногин – 3-е изд., испр. – Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2002 с. – 488 с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов: монография / Т. Като. – пер. с англ. – Москва : Мир, 1972. – 740 с.
8. Качалов В. И. Об аналитических решениях задач нелинейной теории возмущений / В. И. Качалов, Д. А. Маслов // Сибирские электронные математические известия. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 457–464.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Яшар Т. Мегралиев¹, Афаг Гусейнова¹, Анар Мамедов²

¹Бакинский государственный университет

²Бакинский славянский университет

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестными коэффициентами и правой частью, зависящей от времени, для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с нелокальными условиями в прямоугольнике. Даётся определение классического решения поставленной задачи. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее на основе этих фактов доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи. Ключевые слова: нелинейная обратная краевая задача, дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка, существование и единственность, классического решения.

Ключевые слова: обратная краевая задача для псевдогиперболического уравнения, метод Фурье, классическое решение.

Введение

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2, 3], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи, в которых наряду с нахождением решения требуется найти входные данные, например, коэффициенты уравнения или функции, определяющие начальные или граничные условия. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки.

В данной работе, следуя [5, 6], мы доказываем существование и единственность решения нелинейной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с нелокальными условиями в прямоугольнике.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим обратную краевую задачу для уравнения

$$u_{tt}(x, t) - \alpha u_{txx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = a(t)u(x, t) + b(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ с нелокальными начальными условиями интегрального вида

$$\begin{aligned} u(x, 0) - \int_0^T M(t)u(x, t)dt &= \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \quad (0 \leq x \leq 1), \end{aligned} \quad (2)$$

граничным условием

$$u_x(0, t) = u(1, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительными условиями

$$\int_0^1 u(x, t)dx = h_1(t), \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

$$u(0, t) = h_2(t), \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $M(t)$, $h_i(t)$ ($i = 1, 2$) заданные функции, а $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$ искомые функции.

Обозначим через

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(4,2)}(D_T) = \{u(x, t) : &u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxx}(x, t), \\ &u_{xxxx}(x, t), u_t(x, t), u_{tt}(x, t), u_{ttt}(x, t), u_{tttt}(x, t) \in C(D_T)\}. \end{aligned}$$

Определение 1. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(5) будем понимать тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$, если $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$, $b(t) \in C[0, T]$ и выполняются соотношения (1)–(5) в обычном смысле.

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$, $b(t) \in C[0, T]$ из (1)–(3) и

$$a(t)h_1(t) + b(t) \int_0^1 g(x, t)dx + \int_0^1 f(x, t)dx = h_1''(t) - \alpha u_{ttt}(1, t) + u_{xxx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$a(t)h_2(t) + b(t)g(0, t) + f(0, t) = h_2''(t) - \alpha u_{ttt}(0, t) + u_{xxx}(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Аналогично [1], доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $M(t) \in C[0, T]$, $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$), $g(x, t) \in C(D_T)$, $f(x, t) \in C(D_T)$, $h(t) \equiv h_1(t)g(0, t) - h_2(t) \int_0^1 g(x, t)dx \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$) и выполняются условия соглашения

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = h_1(0) - \int_0^T M(t)h_1(t)dt, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = h_1'(0), \quad \varphi(0) = h_2(0) - \int_0^T M(t)h_2(t)dt, \quad \psi(0) = h_2'(0).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(5) является и решением задачи (1)–(3), (6), (7);

2. Каждое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(3), (6), (7), такое, что

$$\left(\|M(t)\|_{C[0, T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0, T]} \right) T < 1$$

является классическим решением задачи (1)–(5).

2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.

Компоненту $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(3), (6), (7) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \right), \quad (8)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, T]$.

Тогда, применяя формальную схему меда Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) &= F_k(t; u, a, b) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \\ u_k(0) &= \varphi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt, \\ u_k'(0) &= \psi_k \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} F_k(t; u, a, b) &= f_k(t) + a(t) u_k(t) + b(t) g_k(t), \\ f_k(t) &= 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad g_k(t) = 2 \int_0^1 g(x, t) \cos \lambda_k x dx, \\ \varphi_k &= 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Решая задачу (9), (10) находим

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \left(\varphi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt \right) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \lambda_k t + \\ &+ \frac{1}{\beta_k (1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1 + \alpha \lambda_k^2}}.$$

Для определения первой компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)–(3), (6), (7), учитывая соотношения (3.26), из (3.23) получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\varphi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt \right) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \lambda_k t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_k (1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь, из (6), (7) имеем:

$$\begin{aligned} a(t) &= [h(t)]^{-1} \left\{ \left(h_1''(t) - \int_0^1 f(x, t) dx \right) g(0, t) - (h_2''(t) - f(0, t)) \int_0^1 g(x, t) dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k^4}{1 + \alpha \lambda_k^2} \left(\varphi_k + \int_0^T M(t) u_k(t) dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\beta_k (1 + \alpha \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha\lambda_k^2}{1+\alpha\lambda_k^2}F_k(t;u,a,b)\left[\left(\frac{(-1)^k}{\lambda_k}g(0,t)-\int_0^1g(x,t)dx\right)\right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} b(t) = & [h(t)]^{-1} \left\{ (h_2''(t) - f(0,t))h_1(t) - \left(h_1''(t) - \int_0^1 f(x,t)dx \right)h_2(t) + \right. \\ & + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k^4}{1+\alpha\lambda_k^2} \left[\left(\varphi_k + \int_0^T M(t)u_k(t)dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau;u,a,b) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha\lambda_k^2}{1+\alpha\lambda_k^2} F_k(t;u,a,b) \right] \left(h_1(t) - \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} h_2(t) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (6), (7) свелось к решению системы (12), (13), (14) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)–(3), (6), (7) важную роль играет следующая.

Лемма 1. Если $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ любое классическое решение задачи (1)–(3), (6), (7), то функции $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx$ удовлетворяют системе (11).

Из леммы 1 следует, что имеет место следующее

Замечание. Из леммы 1 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)–(3), (6), (7), достаточно доказать единственность решения системы (12), (13), (14).

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (6), (7) удовлетворяют следующий условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi^{(4)}(0) = 0$
2. $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1)$, $\psi'(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$
3. $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0,t) = f(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $g(x,t), g_x(x,t) \in C(D_T)$, $g_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $g_x(0,t) = g(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $M(t) \in C[0,T]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i = 1, 2$),

$$h(t) \equiv h_1(t)g(0,t) - h_2(t) \int_0^1 g(x,t)dx \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

Доказана следующая.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–5. Тогда задача (1)–(3), (6), (7) при малых значениях $T + \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}$ имеет единственное решение.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняется все условия теоремы 2 и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)dx = h_1(0) - \int_0^T M(t)h_1(t)dt, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = h_2'(0), \quad \varphi(0) = h_2(0) - \int_0^T M(t)h_2(t)dt, \quad \psi(0) = h_2'(0). \\ \left(\|M(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}(A(T) + 2) \right) T < 1. \end{aligned}$$

Тогда задача (1)–(6) при малых значениях $T + \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}$ имеет единственное классическое решение.

Литература

1. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А. А. Самарский // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – Р. 1925–1935.
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J. R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 5, № 21. – Р. 155–160.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Диф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – Р. 294–304.
4. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.
5. Mehraliyev Y. T., Huseynova A. F. On solvability of an inverse boundary value problem for pseudo hyperbolic equation of the fourth order // Journal of Mathematics Research. – 2015. – 7, no 2 – Р. 101–109.
6. Isgendarov N. Sh., Mehraliyev Y. T. and Huseyinova A. F. On an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation with an Integral Condition // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no 63. – Р. 3119–3131.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ И УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Е. Е. Некрылов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена спектральным свойствам краевой задачи для оператора второго порядка с разрывными коэффициентами и решениями. Для анализа применяется метрическое расширение и специальные функциональные пространства. Основные результаты включают условия осцилляционности спектра и доказательство свойства перемежаемости нулей собственных функций. Исследование опирается на интегральные и поточечные методы, предложенные Ю. В. Покорным и М. Б. Зверевой.

Ключевые слова: спектральная задача, разрывные решения, дифференциальный оператор второго порядка, осцилляционность спектра, собственные значения, собственные функции, метрическое расширение, определитель Вронского, интегральные методы, функции с разрывами, краевая задача.

Введение

В отличие от предыдущих исследований, рассматривавших случай закрепленных концов, здесь анализируется общая ситуация с упругими краевыми условиями при $\gamma_i > 0$. Для корректной постановки задачи в точках разрыва коэффициентов применяется конструкция расширенного пространства $\overline{[0, \ell]}_\sigma^{(2)}$.

Целью статьи является установление новых свойств собственных функций, а именно доказательство связи между определителем Вронского $\Delta(\lambda)$ и нормировочными множителями α_k . Методологическую основу исследования составляет поточечный подход, развитый Ю. В. Покорным.

1. Основной результат

В работе получены некоторые свойства спектральной задачи с разрывными решениями

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_\sigma + qu = \lambda mu, \\ pu'_\mu(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ pu'_\mu(\ell) + \gamma_2 u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\gamma_i > 0$. При этом мы можем считать, что $\gamma_1 = \infty$ и/или $\gamma_2 = \infty$ соответствует краевому условию $u(0) = 0$ и/или $u(\ell) = 0$.

В работе [1] для случая $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$ эта задача изучалась в интегро-дифференциальной форме, когда уравнение проинтегрировано по мере σ в пределах от 0 до x . Было доказано, что в этом случае спектр задачи (1) является осцилляционным, т. е. состоит только из собственных значений, единственная точка сгущения — это $+\infty$; нулевые места собственных функций перемежаются.

Решение задачи (1) мы ищем в классе μ -абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций, первая производная которых σ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$.

Мы считаем, что уравнение задано на специальном расширении $\overline{[0, \ell]}_\sigma^{(2)}$ отрезка $[0, \ell]$, которое строится следующим образом. Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва строго возрастающей на $[0, \ell]$ функции $\sigma(x)$. На $[0, \ell]$ зададим метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если

$S(\sigma)$ непусто, то, как нетрудно видеть, метрическое пространство $([0, \ell]; \rho)$ неполно. Стандартное пополнение нам дает $[\underline{0}, \ell]_\mu$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку упорядоченных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$ (рис. 1). Формальная замена элемента ξ из этого набора на упорядоченную пару собственных элементов $\{\tau_1^\xi; \tau_2^\xi\}$ (рис. 2) и приводит к множеству $[\underline{0}, \ell]_\sigma^{(2)}$.

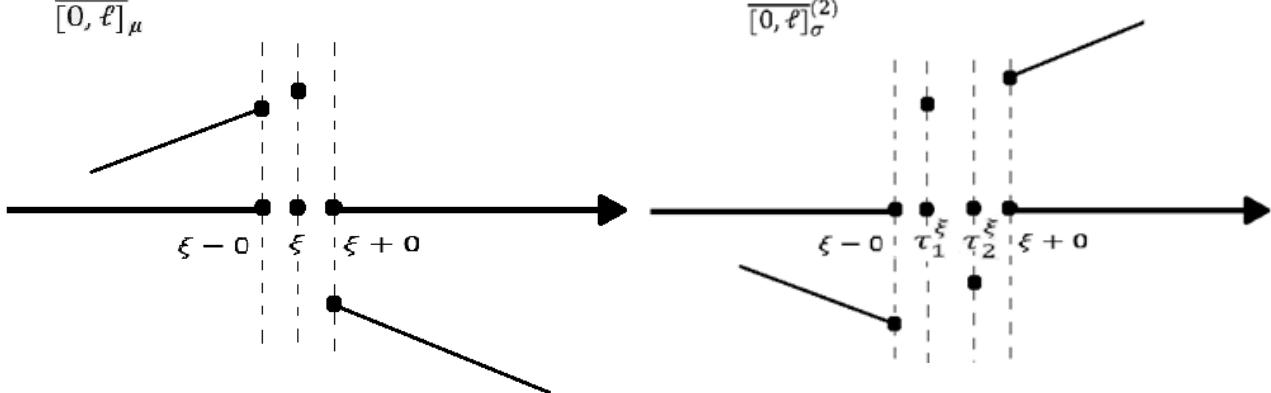


Рис. 1. Специальное расширение $[\underline{0}, \ell]_\mu$

Рис. 2. Специальное расширение $[\underline{0}, \ell]_\sigma^{(2)}$

Уравнение в точках $\{\tau_1^\xi; \tau_2^\xi\}$ мы понимаем как равенства

$$\begin{aligned} -\Delta^-(pu'_\mu)(\xi) + q(\tau_1^\xi)u(\xi - 0) &= \lambda m(\tau_1^\xi)u(\xi - 0), \\ -\Delta^+(pu'_\mu)(\xi) + q(\tau_2^\xi)u(\xi + 0) &= \lambda m(\tau_2^\xi)u(\xi + 0), \end{aligned}$$

где $\Delta^-\psi(x) = \psi(x) - \psi(x - 0)$ и $\Delta^+\psi(x) = \psi(x + 0) - \psi(x)$ — левый и правый скачки функции $\psi(x)$ в точке x соответственно.

Мы предполагаем выполнеными следующие условия:

- 1) $p(x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} p > 0$;
- 3) $q(x)$ и $m(x)$ — σ -суммируемые на $[\underline{0}, \ell]_\sigma^{(2)}$ функции;
- 4) $m(x) > 0$ для всех $x \in [\underline{0}, \ell]_\sigma$.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения уравнения $Lu = \lambda m u$, удовлетворяющие начальным условиям $u(0) = \gamma_1$, $pu'_\mu(0) = 1$ и $u(\ell) = \gamma_2$, $pu'_\mu(\ell) = -1$, соответственно. В [1] введен аналог определителя Бронского системы $\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)\}$, и доказано, что он не зависит от x . Обозначим его через $\Delta(\lambda)$.

В работе доказана теорема.

Теорема. Пусть λ_k — одно из собственных значений задачи (1), тогда существует отличное от нуля β_k , такое, что

$$\varphi(x, \lambda) \equiv \beta_k \psi(x, \lambda),$$

и справедливо равенство

$$\alpha_k \beta_k = \frac{d}{d\lambda} \Delta \Big|_{\lambda=\lambda_k},$$

где

$$\alpha_k = \int_0^\ell \varphi^2(x, \lambda_k) M'_\sigma(x) d\sigma(x).$$

Отметим, что при анализе изучаемого уравнения мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным [2].

Заключение

Таким образом, в работе получено ключевое соотношение, связывающее определитель Вронского $\Delta(\lambda)$ и квадрат нормы собственной функции для спектральной задачи с разрывными решениями.

Благодарности

Выражаю свои глубочайшие благодарности своему научному руководителю Шаброву Сергею Александровичу.

Литература

1. Зверева М. Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильеса. дис. ... канд. Наук. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2005.
2. Покорный Ю. В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях. – ДАН, 1999.

ОБ ОЦЕНКЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Н. Орешина

Липецкий государственный технический университет

Аннотация. Предлагается метод приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с матричными коэффициентами большой размерности. Точное решение такого уравнения может быть выражено через экспоненту от квадратичного матричного пучка и ее производную. В докладе предполагается, что пучок факторизован, а его корни являются диагонализуемыми матрицами. Для вычисления приближенного решения используются рациональные функции от матричных корней пучка. Получена абсолютная оценка точности приближенного решения однородного уравнения.

Ключевые слова: квадратичный пучок, корни пучка, функции от пучка, матричная экспонента, рациональная аппроксимация, оценки приближения.

Введение

Хорошо известно, что решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

сводится к нахождению экспоненты от матрицы A ,

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

где I — единичная матрица, а контур Γ охватывает спектр матрицы A . При этом в случае, когда матрица A имеет большую размерность, вычисление матричной экспоненты является нетривиальной задачей и требует применения приближенных методов.

Для факторизованного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d}{dt} I - Y \right) \left(\frac{d}{dt} I - X \right) x(t) = f(t)$$

формулы для точного решения содержат функции $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$ и $\lambda \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ от матриц X и Y . Для матриц большой размерности в докладе предлагается использовать рациональные аппроксимации этих функций. В теореме 2 приводится априорная оценка точности полученного приближенного решения для случая однородного уравнения.

Близкий подход для приближенного решения уравнения первого порядка в случае матрицы A большой размерности, самосопряженной относительно некоторого специального скалярного произведения, изложен в [1], а для уравнения с неограниченным нормальным операторным коэффициентом A — в [2].

1. Точное решение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = f(t), \quad (1)$$

где B и C — постоянные квадратные матрицы большой размерности, а f — непрерывная функция. Матричную функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + B\lambda + C, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

называют *квадратичным пучком*, соответствующим уравнению (1). *Точное решение* уравнения (1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= x_1, \end{aligned} \tag{3}$$

можно записать [3, теорема 1] в терминах аналитических функций от квадратичного пучка (2), а именно

$$x(t) = U'(t)x_0 + U(t)(x_1 + Bx_0) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds,$$

где

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda^2 I + B\lambda + C)^{-1} d\lambda,$$

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} (\lambda^2 I + B\lambda + C)^{-1} d\lambda.$$

Здесь контур Γ охватывает спектр пучка.

Говорят, что квадратичный матричный пучок *факторизован*, если его можно разложить на линейные множители, то есть представить в виде

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + B\lambda + C = (\lambda I - Y)(\lambda I - X).$$

Очевидно, в этом случае исходное дифференциальное уравнение (1) можно также записать в факторизованном виде

$$\left(\frac{d}{dt} I - Y \right) \left(\frac{d}{dt} I - X \right) x(t) = f(t). \tag{4}$$

Ниже будем всегда предполагать, что спектры матриц X и Y не пересекаются. Следующая теорема может быть получена из [3, теорема 1] и [4, теорема 3] и позволяет выписать явную формулу для точного решения уравнения (4). В этой формуле используется вспомогательная матрица W , которая может быть найдена как решение уравнения Сильвестра [5].

Теорема 1. *Пусть спектры матриц X и Y не пересекаются. Тогда решение факторизованного уравнения (4) с начальными условиями (3) можно представить в виде*

$$x(t) = (Xe^{Xt}W - WYe^{Yt})x_0 + (e^{Xt}W - We^{Yt})(x_1 - (X + Y)x_0) + \int_0^t (e^{X(t-s)}W - We^{Y(t-s)})f(s)ds, \tag{5}$$

где матрица W является решением уравнения Сильвестра

$$XW - WY = I.$$

2. Приближенное решение

Напомним, что нас интересует случай, когда матричные коэффициенты исходного уравнения имеют большую размерность, поэтому вычисление точного решения по формуле (5) затруднительно. В таких ситуациях предлагается использовать следующий приближенный метод.

Подберем две скалярные рациональные функции, приближающие экспоненту $e^{\lambda t}$ и ее производную по t на спектре матрицы X , то есть

$$r_t^1(\lambda) \approx e^{\lambda t}, \quad r_t^2(\lambda) \approx \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \sigma(X),$$

с корнями знаменателя вне $\sigma(X)$. Аналогично выберем две скалярные рациональные функции для матрицы Y :

$$r_t^3(\lambda) \approx e^{\lambda t}, \quad r_t^4(\lambda) \approx \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \sigma(Y).$$

Затем подставим в найденные рациональные функции матрицы X , Y и заменим в формуле (5) матричные функции e^{Xt} , Xe^{Xt} , e^{Yt} , Ye^{Yt} соответствующими рациональными приближениями, в результате получим формулу для приближенного решения:

$$\tilde{x}(t) = \left(r_t^2(X)W - Wr_t^4(Y) \right) x_0 + \left(r_t^1(X)W - Wr_t^3(Y) \right) (x_1 - (X+Y)x_0) + \int_0^t \left(r_{t-s}^1(X)W - Wr_{t-s}^3(Y) \right) f(s) ds.$$

Будем предполагать, что матрицы X и Y являются *диагонализуемыми*, то есть представимы в виде

$$X = TD_X T^{-1}, \quad Y = HD_Y H^{-1},$$

где D_X и D_Y — диагональные матрицы из собственных значений матриц X и Y , а T и H — матрицы из собственных векторов матриц X и Y .

Следующая теорема позволяет оценить абсолютную точность приближенного решения однородного факторизованного уравнения.

Теорема 2. Пусть $f(t) \equiv 0$, а скалярные рациональные функции удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |r_t^1(\lambda) - e^{\lambda t}| &\leq \varepsilon_1(t), & |r_t^2(\lambda) - \lambda e^{\lambda t}| &\leq \varepsilon_2(t), & \lambda \in \sigma(X), \\ |r_t^3(\lambda) - e^{\lambda t}| &\leq \varepsilon_3(t), & |r_t^4(\lambda) - \lambda e^{\lambda t}| &\leq \varepsilon_4(t), & \lambda \in \sigma(Y). \end{aligned}$$

Тогда для приближенного решения \tilde{x} справедлива абсолютная оценка

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\|_2 \leq (\varepsilon_2(t)\kappa(T) + \varepsilon_4(t)\kappa(H))\|W\|_2 \cdot \|x_0\|_2 + (\varepsilon_1(t)\kappa(T) + \varepsilon_3(t)\kappa(H))\|W\|_2 \cdot \|x_1 - (X+Y)x_0\|_2,$$

где $\kappa(T) = \|T\|_2 \cdot \|T^{-1}\|_2$ и $\kappa(H) = \|H\|_2 \cdot \|H^{-1}\|_2$ — числа обусловленности матриц T и H .

Замечание. Отметим, что если матрицы X и Y являются нормальными, то соответствующие им матрицы T и H являются унитарными, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= \|T\|_2 \cdot \|T^{-1}\|_2 = \|T\|_2 \cdot \|T^*\|_2 = 1 \cdot 1 = 1, \\ \kappa(H) &= \|H\|_2 \cdot \|H^{-1}\|_2 = \|H\|_2 \cdot \|H^*\|_2 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, когда корни квадратичного пучка являются нормальными матрицами, формула для оценки приближенного решения упрощается.

Литература

1. Kurbatov V. G. Interconnect macromodelling and approximation of matrix exponent/ V. G. Kurbatov, M. N. Oreshina // Analog integrated circuits and signal processing. – 2004. – Vol. 40, no. 1. – P. 5–19.
2. Орешина М. Н. Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором / М. Н. Орешина // Прикладная математика & Физика. – 2024. – Т. 56, № 4. – С. 286–295.
3. Kurbatov V. G. A complete pair of solvents of a quadratic matrix pencil / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Proyecciones Journal of Mathematics. – 2025. – Vol. 44, no. 2. – P. 365–389.
4. Орешина М. Н. Аналитические функции от факторизованного квадратичного пучка / М. Н. Орешина // Вестник высших учебных заведений Черноземья. – 2005. – № 1. – С. 26–30.
5. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. Ортогональные методы / Х. Д. Икрамов. – Москва : Наука, 1984. – 192 с.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТАБЛИЦ БУТЧЕРА ДЛЯ МЕТОДОВ РУНГЕ — КУТТЫ

М. А. Писарцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы построения таблиц Бутчера для метода Рунге — Кутты 4-го порядка точности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Выявлена зависимость точности вычисления и структуры таблицы Бутчера от свободных коэффициентов системы уравнений. В качестве иллюстрации зависимостей рассмотрен пример построения таблицы погрешностей одного уравнения Коши. **Ключевые слова:** метод Рунге — Кутты, таблица Бутчера, метод Рунге — Кутты — Чебышева, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введение

Методы Рунге — Кутты (РК) [1, 2, 4, 5, 6] являются одними из наиболее распространённых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Наибольшую известность получил явный метод Рунге 4-го порядка точности, отличающийся простотой реализации и понимания.

Однако в настоящей работе применяется неявный метод Рунге — Кутты — Чебышева (РКЧ) [4–6] 4-го порядка точности, построенный на основе квадратурной формулы Чебышева. Он позволяет достичь высокой точности при решении жёстких и нежёстких систем ОДУ. Особое внимание уделено построению таблицы Бутчера (ТБ) — ключевого элемента, определяющего структуру и свойства метода Рунге–Кутты.

Проведённые эксперименты показали, что при фиксированном порядке аппроксимации система уравнений порядка может оказаться недоопределённой, что приводит к появлению свободных коэффициентов. Варьирование этих параметров позволяет получать различные реализации метода с одинаковым теоретическим порядком, но разной практической точностью.

1. Теоретическая часть

Рассмотрим начальную задачу Коши

$$y'(x) = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

где функция f является непрерывно дифференцируемой требуемое число раз.

Пусть s — натуральное число. Пусть заданы числа c_i , b_j и a_{ij} , где $i, j = 1, \dots, s$. (*Неявным*) s -стадийным методом Рунге — Кутты (методом РК) называют [2, 4, 5, 6] следующее правило вычисления приближения y_1 к точному значению $y(x_0 + h)$ решения y начальной задачи в точке $x_0 + h$:

$$k_i = f\left(x_0 + hc_i, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, s, \quad (1)$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j. \quad (2)$$

В общем случае набор равенств (1) представляет собой систему уравнений относительно k_i . Обычно эта система может быть решена при малых h методом последовательных приближений, поскольку в правой части формулы (1) перед суммой k_j стоит малый множитель h .

Если $a_{ij} = 0$ при $i \leq j$, метод называют *явным*. В этом случае числа k_i можно найти из уравнений (1) последовательно. Если $a_{ij} = 0$ только при $i < j$, то метод называют *диагонально неявным*. В этом случае числа k_i можно снова находить последовательно, решая при этом нелинейные уравнения, содержащие только одну неизвестную. Интерес возникает к *неявным* методам, когда все или почти все числа a_{ij} могут оказаться ненулевыми. Метод Рунге — Кутты — Чебышева (метод РКЧ) как раз таки является *неявным* методом, поскольку при составлении все или почти все числа a_{ij} могут оказаться ненулевыми.

Неявные методы РК обладают важным преимуществом по сравнению с явными: их область устойчивости может содержать всю левую полуплоскость. Только такие методы подходят для решения ОДУ.

Параметры c_i , b_j и a_{ij} метода РК традиционно принято располагать в виде табл. 1, называемой *таблицей Бутчера*.

Таблица 1
Таблица Бутчера метода РК

c_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$...	$a_{1,s-1}$	$a_{1,s}$
c_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$...	$a_{2,s-1}$	$a_{2,s}$
...
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$...	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s

Как говорилось ранее, ТБ содержит в себе всю информацию о методе Рунге — Кутты.

Важным критерием качества метода РК является порядок аппроксимации. Говорят, что метод РК имеет *порядок аппроксимации* m , если для любых достаточно гладких дифференциальных уравнений имеет место

$$y_1 - y(x_0 + h) = O(h^{m+1}) \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

где $y(x_0 + h)$ — значение точного решения начальной задачи, а y_1 — значение приближенного решения в точке $x_0 + h$. Эквивалентное требование — ряды Тейлора по h приближенного y_1 и точного y решений совпадают до членов порядка h^m .

Уравнения порядка аппроксимации не являются независимыми, и во многих случаях коэффициенты a_{ij} можно найти при решении линейных уравнений [2, 7]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} &= \frac{1}{q}, & q &= 1, \dots, m, & (B(m)) \\ \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} &= \frac{c_i^q}{q}, & i &= 1, \dots, s; q &= 1, \dots, \eta, & (C(\eta)) \\ \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} &= \frac{b_j}{q} (1 - c_j^q), & j &= 1, \dots, s; q &= 1, \dots, \zeta, & (D(\zeta)) \end{aligned} \quad (3)$$

для некоторых η и ζ , удовлетворяющих неравенствам $m \leq \eta + \zeta + 1$ и $m \leq 2\eta + 2$ (*).

Уравнения (3) дают возможность получить порядок аппроксимации m , необходимый для методов РК.

2. Численный пример

Рассматривается построение ТБ для метода РКЧ 4-го порядка точности. Уже известен алгоритм построения метода [2, 4, 5]: нахождение коэффициентов c_i и b_j полагаются на квадратурную формулу Чебышева. Однако, для вычисления коэффициентов a_{ij} нужно использовать формулы (3), которые при заданном порядке аппроксимации [2] $m = s = 4$ дают систему из 16-ти уравнений.

В системе уравнений (3) ключевую роль играют η и ζ при условии (*). Было рассмотрено 3 комбинации значений, при которых система (3) строилась на основе следующих условий:

$$\begin{aligned}\eta &= 4, \zeta = 0 \\ \eta &= 3, \zeta = 1 \\ \eta &= 2, \zeta = 2\end{aligned}\tag{4}$$

Первый случай ($\eta = 4, \zeta = 0$) даёт стандартную реализацию и ранее рассматривался [5]. В настоящей работе рассматривается второй случай ($\eta = 3, \zeta = 1$). При нахождении решений системы (3) получены следующие коэффициенты a_{ij} :

$$\begin{aligned}a_{11} &= -0.236068 * a_{24} - 0.236068 * a_{34} - 0.236068 * a_{44} + 0.224058, \\ a_{12} &= 0.236068 * a_{24} + 0.236068 * a_{34} + 0.236068 * a_{44} - 0.0908679, \\ a_{13} &= a_{24} + a_{34} + a_{44} - 0.436721, \\ a_{14} &= -a_{24} - a_{34} - a_{44} + 0.406204, \\ a_{21} &= 0.236068 * a_{24} + 0.178755, \\ a_{22} &= 0.188055 - 0.236068 * a_{24}, \\ a_{23} &= 0.530518 - a_{24}, \\ a_{31} &= 0.236068 * a_{34} + 0.260609, \\ a_{32} &= -0.236068 * a_{34} - 0.00691855, \\ a_{33} &= 0.152513 - a_{34}, \\ a_{41} &= 0.236068 * a_{44} + 0.233905, \\ a_{42} &= 0.0124045 - 0.236068 * a_{44}, \\ a_{43} &= 0.347487 - a_{44}\end{aligned}\tag{5}$$

Несмотря на то, что имеется 16 неизвестных и 16 уравнений, в результате вычислений (5) коэффициенты a_{24} , a_{34} и a_{44} получились свободными, то есть их можно задавать произвольным образом. Это объясняется тем, что получены зависимые уравнения, и количество ТБ может быть бесконечным. Теория говорит, что при любом подборе получится метод РК с порядком аппроксимации m , но с разными результатами. Для обобщенности и простоты вычислений свободные коэффициенты будут приравнены к нулю (табл. 2).

В системе уравнений (5) присутствует взаимозаменяемость свободных коэффициентов. Это даёт возможность сделать таблицу (табл. 3) при новых свободных коэффициентах a_{14} , a_{24} и a_{34} .

Таблица 2

ТБ при $\eta = 3, \zeta = 1$				
0.102673	0.224058	-0.0908679	-0.436721	0.406204
0.897327	0.178755	0.188055	0.530518	0
0.406204	0.260609	-0.00691855	0.152513	0
0.593796	0.233905	0.0124045	0.347487	0
	0.5	0.5	0.5	0.5

Таблица 3

ТБ при $\eta = 3, \zeta = 1$ новая				
0.102673	0.128167	0.00502378	-0.0305175	0
0.897327	0.178755	0.188055	0.530518	0
0.406204	0.260609	-0.00691855	0.152513	0
0.593796	0.329797	-0.0834872	-0.0587171	0.406204
	0.5	0.5	0.5	0.5

Как можно заметить, в табл. 2 по сравнению с табл. 1 изменились 1-я и 4-я строки элементов a_{ij} . Согласно теореме [2], элемент c_i равняется сумме строки элементов a_{ij} по $j = 1, m$, то есть $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$.

Теперь необходимо оценить погрешности вычислений. Для этого строится ОДУ вида:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + x * y(x) \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned} \quad (6)$$

Известно точное решение начальной задачи (6):

$$y(x) = \left\{ 0.5e^{\frac{x^2}{2}} \left(\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 \right) \right\},$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$.

Применяя метод РКЧ 4-го порядка точности из полученных ТБ для данного уравнения (отрезок $[0, 2]$ с шагом $h = 0.2$), получаются погрешности приближенных вычислений табл. 4 (разность точного вычисления и применении РКЧ для (6) соответственно).

Наглядно, в табл. 4, показано, что ТБ, коэффициенты a_{ij} которой расположены в каноническом виде (табл. 3), имеют меньшую погрешность. Важно отметить, что при попытке обнуть тройку значений a_{ij} в любых столбцах, кроме последнего, приводили к несовместности системы уравнений, что подчеркивает необходимость осторожного выбора параметров.

Все вычисления проводились в пакете «Математика» [3, 8].

Таблица 4

Погрешности вычислений приближенного решения уравнения

Значения в узлах	0	0.2	0.4	0.6	0.8	...
Погрешности:						
Применение ТБ при $a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$	0	0.05025	0.14357	0.28939	0.48648	...
Применение ТБ при $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$	0	0.014975	0.04172	0.08174	0.13166	...
...	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
...	0.68414	0.67296	0.21731	3.9358	15.91190	50.98966
...	0.16986	0.11940	0.25236	1.60218	5.72704	17.48370

*Примечание: погрешности умножены на 10^8 (6).

Заключение

Проведённые численные эксперименты показывают, что при построении методов Рунге — Кутты фиксированного порядка аппроксимации система условий порядка может допускать свободные параметры. Это приводит к существованию множества различных таблиц Бутчера, каждая из которых формально соответствует заданному порядку, но обеспечивает различную практическую точность.

Выбор свободных коэффициентов оказывает существенное влияние на качество численного решения. Таким образом, при конструировании методов Рунге — Кутты необходимо не только удовлетворять условиям порядка, но и проводить дополнительный анализ с целью минимизации вычислительной погрешности.

Литература

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Второе изд. – М. –Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002.– 848 с.
2. Курбатов В. Г. Конструирование методов Рунге — Кутты: учебное пособие / В. Г. Курбатов. – Второе изд. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. – 98 с.
3. Курбатов В. Г. Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – 240 с.
4. Писарцов М. А. Компьютерная программа для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге — Кутты / М. А. Писарцов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2-4 декабря 2024 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2025. – С. 124–128.
5. Писарцов М. А. О неявном методе Рунге — Кутты – Чебышева / М. А. Писарцов // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2024. – Т. 17. – С. 152–161. – EDN SMBOIT.
6. Писарцов М. А. Построение метода Рунге — Кутты — Чебышева / М. А. Писарцов // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых учёных и студентов, Воронеж, 24-25 апреля 2024 г. – Воронеж : Научная книга, 2024. – С. 685-691.
7. Butcher J. C. Implicit Runge — Kutta processes / John Charles Butcher // Math. Comp. – 1964. – Vol. 18. – P. 50–64.
8. Wolfram S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Fifth edition. – New York : Wolfram Media, 2003. – 1488 p.

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ БОЛЬШОМ ВРЕМЕНИ

А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

Аннотация. При изучении задач для параболических уравнений естественным образом возникает вопрос о поведении их решений при большом времени. Рассматривается вторая начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности в одномерном полупространстве. Для случая однородных начальных и граничных условий представлено решение задачи, построены точная равномерная оценка и точная асимптотика решения задачи по времени.

Ключевые слова: параболические уравнения, распределение тепла, стабилизация решения, поведение по времени, асимптотика по времени, уравнение теплопроводности, оценка по времени, асимптотика на бесконечности, равномерные оценки, поточечные оценки.

Введение

Одним из направлений исследования эволюционных задач является изучение поведения их решений при большом времени (см. [1–13]).

В работе рассматривается задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \alpha(t), \quad (2)$$

$$u(x,0) = \psi(x), \quad (3)$$

где $x > 0, t > 0, a \equiv \text{const} > 0$.

Под решением задачи (1)–(3) понимается классическое решение, то есть такая функция $u(x,t)$, которая принадлежит множеству $C_{x,t}^{2,1}((0;\infty) \times (0;\infty)) \cap C_{x,t}^{1,0}([0;\infty) \times [0;\infty))$, удовлетворяет уравнению (1) и дополнительным условиям (2) и (3).

Предполагается выполнение условий.

Условие 1. Будем считать, что $\alpha(t) \in C([0;\infty)), \psi(x) \in C([0;\infty))$.

Условие 2. Будем считать, что $f(x,t) \in C([0;\infty) \times [0;\infty))$ и является финитной по совокупности переменных, то есть существует такое $N > 0$, что $\text{supp } f(x,t) \subset [0;N] \times [0;N]$.

Условие 3. Будем считать, что $f(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}((0;\infty) \times (0;\infty)) \cap C_{x,t}^{1,0}([0;\infty) \times [0;\infty))$.

1. Сведение к обобщенному уравнению

Введем в рассмотрение функции

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(-x,t), & x < 0, t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}, t < 0, \end{cases} \quad \hat{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ f(-x,t), & x < 0, t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}, t < 0, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \hat{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $u(x,t), f(x,t), \psi(x), \alpha(t)$ — функции из задачи (1)–(3).

Действуя стандартным образом (см. [14]), можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Если у задачи (1)–(3) существует решение, то функция $\hat{u}(x, t)$ является решением следующего обобщенного уравнения в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$:*

$$\frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x^2} = \hat{f}(x, t) - 2a^2 \hat{\alpha}(t) \delta(x) + \hat{\psi}(x) \delta(t), \quad (4)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

2. Построение решения обобщенного уравнения

Доказательство существования решения у задачи (1)–(3)

Так как фундаментальным решением оператора теплопроводности является функция

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \quad (\text{см. [14]}),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, то, вычислив

свёртку $E(x, t)$ с правой частью уравнения (4), можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Если $\psi(x) \equiv 0$, $\alpha(t) \equiv 0$ и выполнено условие 2, то решением уравнения (4) будет функция*

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0-\infty}^t \int \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \hat{f}(y, \tau) dy d\tau.$$

Отталкиваясь от представления функции $\hat{u}(x, t)$ из леммы 2 можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Если $\psi(x) \equiv 0$, $\alpha(t) \equiv 0$ и выполнены условие 2 и условие 3, то решением задачи (1)–(3) будет функция*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} f(y, \tau) dy d\tau..$$

3. Изучение поведения решения задачи (1)–(3) при большом времени

Используя представление решения задачи (1)–(3) из леммы 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если $\psi(x) \equiv 0$, $\alpha(t) \equiv 0$ и выполнены условие 2 и условие 3, то для решения задачи (1)–(3) равномерно по $x \in [0; \infty)$ при $t > N$ выполнена оценка*

$$|u(x, t)| \leq ct^{-\frac{1}{2}},$$

где c — некоторая константа.

Для каждого фиксированного $x \in [0; \infty)$ при $t \rightarrow \infty$ для решения задачи (1)–(3) справедлива асимптотическая формула

$$u(x, t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int f(y, \tau) dy d\tau + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right),$$

причем оценка $O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$ равномерна по $x \in [0; N_1]$, где N_1 — фиксированное положительное число.

Заключение

Рассматривалась вторая начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности в одномерном полупространстве. Для случая однородных дополнительных условий, используя явное представление решения этой задачи, были построены точная равномерная оценка и точная асимптотика решения задачи по времени. При построении оценок предполагалось, что правая часть уравнения финитна по совокупности переменных.

Литература

1. Тихонов А. Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных / А. Н. Тихонов // Бюлл. МГУ, мат. мех. – 1938. – № 1 (9). – С. 1–40.
2. Эйдельман С. Д. О стабилизации параболических уравнений / С. Д Эйдельман, Ф. О. Порпер // Изв. вузов. Матем. – 1960. – № 4. – С. 210–217.
3. Зеленяк Т. И. Об асимптотике решений одной смешанной задачи / Т. И. Зеленяк // Диф. уравнения. – 1966. – № 2 (1). – С. 47–64.
4. Михайлов В. П. О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности / В. П. Михайлов // Докл. АН СССР. – 1970. – № 90 (1). – С. 38–41.
5. Денисов В. Н. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений / В. Н. Денисов, В. Д. Репников // Диф. уравнения. – 1984. – № 20 (1). – С. 20–41.
6. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко. – Воронеж: ВГУ, 2003. – 300 с.
7. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени / В. Н. Денисов // УМН. – 2005. – № 60 (4). – С. 145–212.
8. Рябенко А. С. Оценка при $t \rightarrow \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 1. – С. 95–99.
9. Глушко А. В. О малых одномерных акустических колебаниях стратифицированной жидкости в полупространстве / А. В. Глушко, А. С. Рябенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2008. – № 1. – С. 226–231.
10. Денисов В. Н. О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с младшими коэффициентами / В. Н. Денисов // ДАН. – 2010. – № 433 (4). – С. 452–454.
11. Першин И. В. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе / И. В. Першин // Тр. ИММ. Уро РАН. – 2012. – № 18 (1). – С. 268–272.
12. Горшков А. В. Стабилизация решения уравнения теплопроводности во внешней сфере с управлением на границе / А. В. Горшков // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2016. – № 5. – С. 3–14.
13. Рябенко А. С. Определение скорости стабилизации решений одной начальной задачи для уравнения теплопроводности / А. С. Рябенко, З Тран // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – № 10 (4). – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1268> (дата обращения: 20.10.2025). – DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.014.
14. Владимиrow В. С. Уравнения математической физики / В. С Владимиrow. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1976. – 519 с.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В. Ю. Чурсин

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка на отрезке с переменным матричным коэффициентом с нелокальным краевым условием, содержащим функцию ограниченной вариации. Краевое условие представляет собой линейный ограниченный функционал, задающийся интегралом Римана — Стильеса. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности. Найдено явное представление для функции Грина, с помощью которой решение задачи представимо с использованием только обычного интеграла Римана.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, функциональное исчисление, функция ограниченной вариации, фундаментальная матрица, векторное дифференциальное уравнение.

Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'(t) - A(t)x(t) = h(t), \quad t \in [a, b],$$

с краевым условием

$$f(x) = \int_a^b dg(t) x(t).$$

Для этой краевой задачи записываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решения при любом свободном члене h , а также записывается явный вид функции Грина.

Формулировка основного результата

Обозначим через $C = C([a, b], C^n)$ линейное пространство всех непрерывных векторных функций $h : [a, b] \rightarrow C^n$, а через $C^1 = C^1([a, b], C^n)$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций x , для которых $x, x' \in C$. Эти пространства являются банаевыми относительно норм

$$\begin{aligned} \|h\| &= \max_{t \in [a, b]} \|h(t)\|, \\ \|x\| &= \max \left\{ \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|, \max_{t \in [a, b]} \|x'(t)\| \right\}, \end{aligned}$$

где в C^n используется произвольная норма. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) - A(t)x(t) = h(t), \quad t \in [a, b] \tag{1}$$

с краевым условием

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

где

$$f(x) = \int_a^b dg(t) x(t).$$

Здесь $A : [a, b] \rightarrow C^{n \times n}$ — непрерывная функция, $h : [a, b] \rightarrow C^n$ — непрерывная функция, $g : [a, b] \rightarrow C^{n \times n}$ — функция ограниченной вариации, $g(b) = 0$. Пусть Φ — фундаментальная матрица дифференциального уравнения (1), т. е. Φ обратима и справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = A(t) \Phi(t).$$

Введем сокращенные обозначения:

$$I_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta g(\tau) A(\tau) \Phi(\tau) d\tau,$$

$$J = g(a) \Phi(a).$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть матрица $I_a^b + J$ обратима. Тогда рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $x \in C^1([a, b], C^n)$ при любом свободном члене $h \in C([a, b], C^n)$, и это решение задается формулой

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) h(s) ds, \quad (3)$$

где

$$G(t, s) = \Phi(t) (-I_a^b - J)^{-1} \times \begin{cases} g(s) - (I_a^s + J) \Phi^{-1}(s), & a \leq s < t, \\ g(s) + I_s^b \Phi^{-1}(s), & t < s \leq b. \end{cases}$$

Условия теоремы гарантируют, что если существует матрица $(I_a^b + J)^{-1}$ существует, то функция G определена корректно. Назовем ее *функцией Грина* краевой задачи (1), (2).

Идея доказательства. Сначала находится формула для решения скалярной краевой задачи

$$x'(t) - \mu x(t) = h(t), \quad t \in [a, b],$$

$$f(x) = 0,$$

где

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t).$$

Это делается путем прямых вычислений. Для удобства введем сокращенные обозначения

$$I_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta g(\tau) \mu e^{\mu\tau} d\tau,$$

$$J = g(a) e^{\mu a}.$$

Для скалярной краевой задачи ответ получается следующий:

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) h(s) ds,$$

где

$$G(t, s) = e^{\mu t} (-I_a^b - J)^{-1} \times \begin{cases} g(s) - (I_a^s + J) e^{-\mu s}, & a \leq s < t, \\ g(s) + I_s^b e^{-\mu s}, & t < s \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

После этого в полученную формулу (4) вместо μ и $e^{\mu t}$ подставляются соответственно $A(t)$ и $\Phi(t)$ и выполняется проверка, для чего доказываются следующие леммы.

Лемма 2. Функция (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

Лемма 3. Функция (3) удовлетворяет краевому условию (2).

В получении результата оказались полезными различные свойства функций ограниченной вариации и интеграла Римана — Стильеса. Подробнее о них можно почитать в [1–3].

Литература

1. Мышкин А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкин. – М. : Наука, 1972. – 352 с.
2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
3. Рудин У. Основы математического анализа / У. Рудин. – М. : Мир, 1966. – 528 с.